Série 5

Exercices variés

Exercice 5.1 Montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5.2 Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel. Qu'en est-il pour le produit ?

Dans les exercices suivants, on considère des fonctions de D dans $\mathbb{R}$, où D est une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 5.3 Montrer que la somme de deux fonctions paires (respectivement, impaires) est une fonction paire (respectivement, impaire). Que dire de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?

Exercice 5.4 Montrer que le produit de deux fonctions paires ou de deux fonctions impaires est une fonction paire. Que dire du produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?

On dit qu'une fonction est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Exercice 5.5 Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est une fonction croissante. La somme de deux fonctions monotones est-elle toujours une fonction monotone ? Le produit de deux fonctions croissantes est-il toujours une fonction croissante ?

Exercice 5.6 On considère la fonction g définie pour x réel par $g(x) = x \sin^2 \dfrac{\pi}{x}$.
a) Préciser le domaine D de définition de la fonction g, et étudier sa parité (est-elle paire ou impaire ?).
b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a l'encadrement $0 \leqslant g(x) \leqslant x$. Préciser pour quelles valeurs de x on a $g(x) = 0$ ou $g(x) = x$.
c) On admet que, pour tout réel $a > 0$, on a $\sin a < a$. En déduire que, pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \leqslant \frac{4\pi^2}{x}$.
d) A l'aide des questions précédentes, dessiner approximativement la courbe de la fonction g.

Exercice 5.7 Soient $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(\alpha_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites réelles, et $l \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ |u_n - l| \leqslant \alpha_n \quad \text{et } \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.