Exercices corrigés - MAT 1120

Série 5

Exercice 5.1

Montrons que : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \; |x-a| \leqslant \varepsilon$.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ fixés. Nous distinguons deux cas :

<u>Cas 1</u> a est irrationnel. Alors on pose $x = a$. On a $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $|x-a| = 0 < \varepsilon$.

<u>Cas 2</u> a est rationnel. Alors on note $n = \left\lfloor \sqrt{2}/\varepsilon \right\rfloor + 1$. On a donc $n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$, d'où $\frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$ (notons que $\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} > 0$ donc $n > 0$).
Posons $x = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$. On a $|x-a| = \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon$. De plus, le produit $\sqrt{2}/n = \sqrt{2} \times \frac{1}{n}$ est irrationnel (cf exercice suivant), donc la somme $x = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnelle (idem).

Dans les deux cas, on a trouvé $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $|x-a| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 5.2

* Soit x un rationnel et y un irrationnel. Supposons (par l'absurde) que $x+y$ est rationnel. Notons $x = \frac{a}{b}$ et $x+y = \frac{c}{d}$, avec a, b, c, d entiers et $b > 0$, $d > 0$. Alors $y = (x+y) - x = \frac{bc - ad}{bd}$ est rationnel : contradiction. Donc

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{Q} \\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Longrightarrow x+y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

* Soit x un rationnel, et y un irrationnel. Supposons que xy est rationnel. Si $x \neq 0$, on montre de même que $y = \frac{xy}{x}$ est rationnel : contradiction.

Donc
$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \text{mais} \quad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{array}\right\} \Rightarrow xy = 0 \in \mathbb{Q}.$$

Exercice 5.3

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0, et $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Si f et g sont paires, alors :

$$\forall x \in D, \quad [f+g](-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = [f+g](x),$$

donc $f+g$ est paire.

Si f et g sont impaires, alors :

$$\forall x \in D, \quad [f+g](-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f+g](x),$$

donc $f+g$ est impaire.

Si f est paire et g impaire, alors $f+g$ n'est ni paire, ni impaire, à moins que f ou g soit la fonction nulle. Par exemple, s'il existe $x_0 \in D$ tel que $g(x_0) \neq 0$,

alors $$[f+g](-x_0) = f(-x_0) + g(-x_0) = f(x_0) - g(x_0) \neq f(x_0) + g(x_0) = [f+g](x_0),$$

donc $f+g$ n'est pas paire.

Exercice 5.4

De même,

f et g paires $\Longrightarrow$ fg paire

f et g impaires $\Longrightarrow$ fg paire

f paire et g impaire $\Longrightarrow$ fg impaire.

Exercice 5.5

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

* Supposons f et g croissantes, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in D^2, \quad x < y \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq f(y) \\ g(x) \leq g(y) \end{cases}.$$

Alors, pour $(x,y) \in D^2$, si $x < y$, on a $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$, c'est-à-dire $[f+g](x) \leq [f+g](y)$. Donc $f+g$ est croissante.

* Si f et g sont toutes deux décroissantes, on prouve de même que $f+g$ est décroissante. Par contre, si f est croissante et g décroissante, on ne peut rien dire de $f+g$.

Par exemple, $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ est croissante et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -x \end{array}$ est décroissante,

mais $f+g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 - x \end{array}$ n'est pas monotone.

Si f et g sont des fonctions croissantes à valeurs positives, alors, pour $x<y$ dans D, on a :

$$\begin{aligned} f(x)\,g(x) &\leqslant f(x)\,g(y) && \text{car } f(x)\geqslant 0 \text{ et } g(x)\leqslant g(y) \\ &\leqslant f(y)\,g(y) && \text{car } g(y)\geqslant 0 \text{ et } f(x)\leqslant f(y). \end{aligned}$$

Donc la fonction fg est croissante.

Par contre, sans hypothèse sur le signe de f et g, on ne peut rien dire.

Par exemple, les fonctions $f: \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto x\end{array}$ et $g: \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto x-1\end{array}$ sont croissante, mais le produit $fg: \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto x(x-1)\end{array}$ n'est pas monotone.

Exercice 5.6

a) On note $g(x) = x\sin^2\frac{\pi}{x}$, ce qui a un sens pour $x\neq 0$.

Le domaine de definition de g est donc $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Pour $x\in\mathbb{R}^*$, $g(-x) = (-x).\left(\sin\frac{\pi}{-x}\right)^2 = -x\sin^2\frac{\pi}{x} = -g(x)$.

La fonction g est impaire.

b) Soit $x>0$ fixé. On a $0\leqslant \sin^2\frac{\pi}{x}\leqslant 1$ (car $-1\leqslant\sin\frac{\pi}{2}\leqslant 1$)

d'où $0\leqslant g(x)\leqslant x$ (car $x\geqslant 0$).

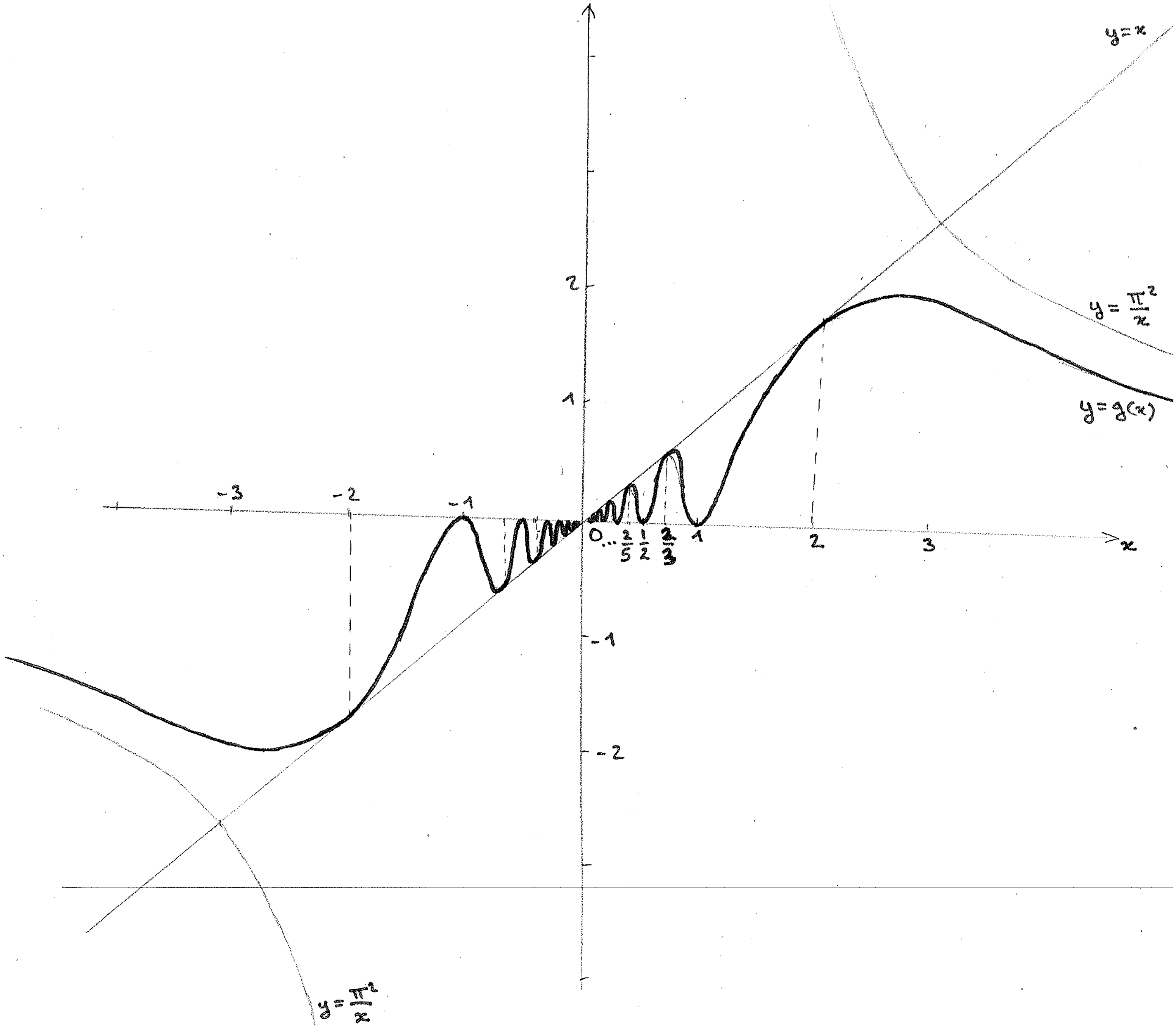
De plus,

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff x\sin^2\frac{\pi}{x} = 0 \\ &\iff \cancel{0 \text{ ou}}\ \sin\frac{\pi}{x} = 0 && (\text{car } x\neq 0) \\ &\iff \frac{\pi}{x} = k\pi \quad \text{pour un } k\in\mathbb{N}^* && (\text{car } x>0) \\ &\iff x = \frac{1}{k} \quad \text{pour un } k\in\mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff x\sin^2\frac{\pi}{x} = x \\ &\iff \sin^2\frac{\pi}{x} = 1 && (\text{car } x\neq 0) \\ &\iff \sin\frac{\pi}{x} = -1 \text{ ou } \sin\frac{\pi}{x} = 1 \\ &\iff \frac{\pi}{x}\in\frac{3\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } \frac{\pi}{x}\in\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z} \\ &\iff \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{pour un } k\in\mathbb{N} && (\text{car } x>0) \\ &\iff x = \frac{1}{k+1/2} \quad \text{pour un } k\in\mathbb{N} \end{aligned}$$

c) Soit $x>0$ fixé. On a $\frac{\pi}{x}>0$ donc $\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|\leqslant\frac{\pi}{x}$, d'où $\sin^2\frac{\pi}{x}<\frac{\pi^2}{x^2}$ et $g(x)<\frac{\pi^2}{x}$ (car $x>0$).



<u>Exercice 5.7</u>

On suppose $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1, \quad |\alpha_n - 0| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geqslant n_1$, on a $|u_n - \ell| \leqslant \alpha_n \leqslant |\alpha_n| = |\alpha_n - 0| \leqslant \varepsilon$.

On a donc prouvé : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \geqslant n_0, \forall n \geqslant n_1, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$,

c'est-à-dire $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.