

## Série 4

### Images et antécédents

Dans les quatre exercices suivants, on demande de trouver toutes les solutions réelles des équations ou systèmes d'équations proposés.

**Exercice 4.1**  $x^2 + x + 1 = 0$  ;  $x^4 - 4x^2 + 4$ .

**Exercice 4.2**  $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$  ;  $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$ .

**Exercice 4.3**  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3$  ;  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} = 12$ .

Indication : il pourra être utile de procéder à des études de fonctions pour déterminer le nombre de solutions de ces deux équations.

**Exercice 4.4**  $2 \cos(2x) + 4 \cos x + 3 = 0$ .

**Exercice 4.5**  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 218 \\ x + y = 20 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 119 \\ x - y = 7 \end{cases}$ .

**Exercice 4.6** Tracer le graphe de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^4 - x^2$ .

Déterminer les ensembles  $f(\mathbb{R})$ ,  $f([-3, 2])$ ,  $f^{-1}([0, 6])$ ,  $f(\{3\})$ ,  $f^{-1}(\{1\})$ ,  $f^{-1}(f([0, \frac{1}{2}]))$  et  $f(f^{-1}([-1, 0]))$ .

**Exercice 4.7** ♣ Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

a) Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux parties de  $E$ . Montrer que

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad \text{et} \quad f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2).$$

b) Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux parties de  $F$ . Montrer que

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \text{et} \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

c) Donner un exemple où l'inclusion de la question a) est stricte.

**Exercice 4.8** ♣ Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

a) Soit  $A$  une partie de  $E$ . Montrer que  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ .

b) Soit  $B$  une partie de  $F$ . Montrer que  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ .

c) Donner des exemples où les inclusions précédentes sont strictes.

**Exercice 4.9** a) Montrer que l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^3$  est une bijection.

b) Qu'en est-il de l'application  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^4$  ?

**Exercice 4.10** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application. Montrer que, si  $f$  est strictement croissante, alors elle est injective. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 4.11** Tracer le graphe de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 2[x] - x$ . Montrer que la fonction  $f$  est bijective, et donner son inverse à l'aide de la fonction partie entière supérieure  $y \mapsto [y]$ .