Exercices corrigés - MAT 1120

Série 4

Exercice 4.1

$x^2+x+1=0$: le discriminant est $\Delta = 1^2-4\times1\times1=-3<0$, donc l'équation n'a pas de solution réelle.

$$x^4-4x^2+4=0 \iff (x^2-2)^2=0$$
$$\iff x^2=2$$
$$\iff x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2}.$$

Exercice 4.2

$e^{2x}-2e^x-3=0$: Soit $x\in\mathbb{R}$, et $y=e^x$. Alors

$$e^{2x}-2e^x-3=0 \iff y^2-2y-3=0$$
$$\iff y=3 \text{ ou } y=-1$$
$$\iff x=\ln 3$$

(car $e^x=-1$ n'est pas possible)

$$5^x-5^{x+1}+2^{3x-1}=0 \iff 2^{3x-1}=4\times5^x$$

en passant à l'exponentielle

$$\iff 2^{3x-3}=5^x$$

en passant au logarithme

$$\iff 3(x-1)\ln 2 = x\ln 5$$
$$\iff x(3\ln 2-\ln 5)=3\ln 2$$
$$\iff x=\frac{3\ln 2}{3\ln 2-\ln 5}.$$

Exercice 4.3

* La fonction $f: x\longmapsto \sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}$ est définie et strictement croissante sur l'intervalle $[-2,+\infty[$. De plus $f(-2)=3$, donc $\forall x\in\,]-2,+\infty[$, $f(x)>3$. Ainsi la seule solution de l'équation $f(x)=3$ est $x=-2$.

* La fonction $g: x\longmapsto\sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}+\sqrt{x+100}$ est définie et strictement croissante sur l'intervalle $[-1,+\infty[$. De plus, $f(-1)=3+\sqrt{99}$, donc $f(-1)>3+\sqrt{81}=12$. Ainsi f ne prend jamais la valeur 12, donc l'équation $f(x)=12$ n'a pas de solution.

Exercice 4.4

Soit $x \in \mathbb{R}$, et $y = \cos x$. Alors $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2y^2 - 1$, donc :

$$\begin{aligned} 2\cos 2x + 4\cos x + 3 = 0 &\iff 4y^2 + 4y + 1 = 0 \\ &\iff y = \frac{1}{2} \\ &\iff \cos x = \frac{1}{2} \\ &\iff x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

Exercice 4.5

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

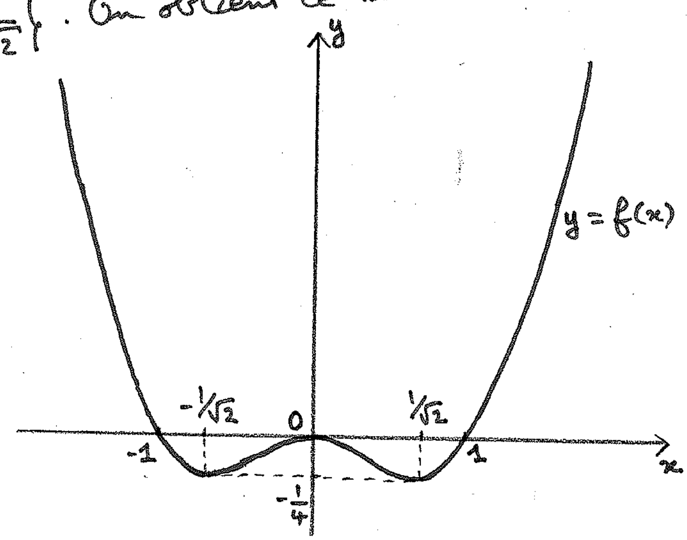
* Si $x^2 + y^2 = 218$ et $x + y = 20$, alors $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = 400$, donc $xy = \dfrac{400 - 218}{2} = 91$. Comme $y = 20 - x$, on obtient $x(20-x) = 91$, c'est-à-dire $x^2 - 20x + 91 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 400 - 4 \times 91 = 36 = 6^2$, donc $x = 7$ ou $x = 13$.
  Ainsi $(x,y) = (7,13)$ ou $(x,y) = (13,7)$. La vérification est immédiate : le premier système a donc deux solutions.
* Si $x^2 - y^2 = 119$ et $x - y = 7$, alors $x + y = \dfrac{119}{7} = 17$. Donc $x = \dfrac{(x+y)+(x-y)}{2} = 12$ et $y = \dfrac{(x+y)-(x-y)}{2} = 5$. Là aussi, la vérification est immédiate.
  L'unique solution du second système est donc le couple $(12, 5)$.

Exercice 4.6

$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^4 - x^2 \end{array}$. f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3 - 2x$.

Ainsi, $f'(x) = 0 \iff x \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. On obtient le tableau de variations et le graphe de f :

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$



D'après le graphe, on obtient :

$f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{4}, +\infty[$ $\qquad f([-3,2[) = [-\frac{1}{4}, 72]$ $\qquad f(\{3\}) = \{72\}$

$f^{-1}([0,6]) = [-\sqrt{3}, -1] \cup \{0\} \cup [1, \sqrt{3}]$ car $f(\sqrt{3}) = 6 = f(-\sqrt{3})$

$f^{-1}(\{1\}) = \left\{ -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right\}$ (résoudre l'équation $x^4 - x^2 - 1 = 0$ en posant $u = x^2$)

$f^{-1}(f([0,\frac{1}{2}])) = f^{-1}([-\frac{3}{16}, 0]) = [-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$

$f(f^{-1}([-1,0[)) = f(]-1,0[\cup]0,1[) = [-\frac{1}{4}, 0[$.

<u>Exercice 4.7</u>

a) $f: E \to F$ est une fonction et A_1, A_2 sont des parties de E.

* $\boxed{\subseteq}$ Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Par définition, il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$. Si $x \in A_1$, alors $y \in f(A_1)$. Si $x \in A_2$, alors $y \in f(A_2)$. Dans les deux cas, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.
  Ainsi $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$.

  $\boxed{\supseteq}$ Soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Si $y \in f(A_1)$, alors il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $x \in A_1 \cup A_2$, donc $y \in f(A_1 \cup A_2)$. De même, si $y \in f(A_2)$, alors $y \in f(A_1 \cup A_2)$.
  Ainsi $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$.

  $\boxed{=}$ Nous avons prouvé que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

* Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Alors il existe $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$. Mais alors $x \in A_1$ et $x \in A_2$, donc $y \in f(A_1)$ et $y \in f(A_2)$, c'est-à-dire $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Ainsi $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

c) Soit $f: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{array}$, $A_1 = \{-1\}$ et $A_2 = \{1\}$.

Alors $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$ mais $f(A_1) \cap f(A_2) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$.

b) Soient B_1, B_2 deux parties de F.

Nous allons pouvoir raisonner par équivalence. Pour $x \in E$ fixé,

$$x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \iff f(x) \in B_1 \cup B_2$$
$$\iff f(x) \in B_1 \quad \text{ou} \quad f(x) \in B_2$$
$$\iff x \in f^{-1}(B_1) \quad \text{ou} \quad x \in f^{-1}(B_2).$$
$$\iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Donc $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. On raisonne de même pour $\cap$.

Exercice 4.8

a) Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction, et A une partie de E.

Pour tout $x \in A$, on a $f(x) \in f(A)$ donc, par définition, $x \in f^{-1}(f(A))$.

Ainsi $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

b) Soit B une partie de F.

Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Par définition, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mais $x \in f^{-1}(B)$ signifie que $f(x) \in B$, donc $y \in B$.

Ainsi $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

c) Des contre-exemples à l'égalité apparaissent dans l'exercice 4.6. Plus simplement, soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{array}$.

On a $f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$

et $f(f^{-1}(\{-1\})) = f(\emptyset) = \emptyset$.

Exercices corrigés - MAT 1120

Série 4

Exercice 4.9

a) On a $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$. Notons $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{x} \end{array}$.

Alors $g \circ f = f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$. Par le théorème de caractérisation des bijection, il s'ensuit que f est bijective.

b) L'application $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^4 \end{array}$ n'est ni injective (car $g(-1) = g(1)$), ni surjective (car $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$). Elle n'est donc pas bijective.

Exercice 4.10

* Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement croissante.
  Soient $x \neq y$ deux réels. Si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$. Si $x > y$, alors $f(x) > f(y)$. Dans les deux cas, $f(x) \neq f(y)$.
  On a prouvé que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$,
  c'est-à-dire que la fonction f est injective.
* Par contre, la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
  est injective, mais pas croissante (car $f(2) < f(1)$), ni même décroissante (car $f(0) < f(1)$). Une fonction peut donc être injective sans être strictement monotone.

Exercice 4.11

On a $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2\lfloor x \rfloor - x \end{array}$. Notons $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2\lceil x \rceil - x \end{array}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $n = \lfloor x \rfloor$ et $r = x - n$.

<u>Cas 1</u> $r = 0$. Alors $n = x$, $f(x) = x$ et $g(f(x)) = x$.

<u>Cas 2</u> $0 < r < 1$. Alors $f(x) = 2n - n - r = (n-1) + (1-r)$ avec $\begin{cases} n-1 \in \mathbb{Z} \\ 0 < 1-r < 1 \end{cases}$,

donc $g(f(x)) = 2n - f(x) = n + r = x$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(f(x)) = x$ donc $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$.

De même, on prouve $f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$.

Par le théorème de caractérisation des bijection, on peut conclure que la fonction f est bijective, et que $f^{-1} = g$.