Série 3

Partie entière, infimum, supremum

Pour beaucoup de ces exercices, il est conseillé de faire un dessin.

Exercice 3.1 Soient a, b deux entiers relatifs avec $b > 0$. Montrer qu'il existe un unique couple (q, r) d'entiers relatifs tels que $a = bq + r$ et $0 \leqslant r \leqslant b - 1$. On dit que q est le quotient, et r le reste, de la division euclidienne de a par b.
Indication : on pourra utiliser la partie entière du réel $\frac{b}{a}$.

Exercice 3.2 Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$; **b)** $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 3.3 Soient a et b deux nombres réels tels que $b - a > 3$. Démontrer que l'intervalle $]a, b[$ contient au moins trois entiers distincts.

Exercice 3.4 Sans calculatrice, calculer les valeurs décimales approchées des nombres suivants.
a) $\dfrac{219}{13}$ à 10^{-2} près par défaut ; **b)** $\dfrac{5}{21}$ à 10^{-3} près par excès.

Exercice 3.5 Montrer que le nombre réel $\log_{10} 2$ est irrationnel.
Ne pas essayer de traiter cet exercice si on ne connaît pas le logarithme décimal.

Exercice 3.6 Trouver le supremum et l'infimum, s'ils existent, de chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{Z}_{>0}$.

$$A = \{\frac{1}{n} ;\ n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}\} \quad ; \quad B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\} \quad ; \quad C = \{(-1)^n n ;\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$D = \{3 - \frac{2}{n} ;\ n \in \mathbb{Z}_{>0}\} \quad ; \quad E = \{(-1)^n (3 - \frac{2}{n}) ;\ n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

Indication : faire des dessins. Après avoir «trouvé» les réponses sur les dessins, on essaiera de les prouver rigoureusement.

Exercice 3.7 Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $A \cup B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
b) Déterminer $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.
c) On suppose $A \cap B$ non vide. Montrer que c'est une partie majorée de $\mathbb{R}$. Que dire de $\sup(A \cap B)$?

Pour l'exercice suivant, si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on note :

$$A + B = \{a + b ; a \in A \text{ et } b \in B\} \quad \textit{et} \quad A \cdot B = \{ab ; a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Exercice 3.8 Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
a) Montrer que $A + B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
b) Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
c) ♣ * Montrer par un exemple que $A \cdot B$ n'est pas nécessairement majorée. A quelle(s) condition(s), portant sur A et B, la partie $A \cdot B$ est-elle majorée ? A-t-on nécessairement $\sup(A \cdot B) = \sup A . \sup B$?