Exercices corrigés - MAT 1120

Série 3

Exercice 3.1 Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

Existence : Posons $q = \lfloor a/b \rfloor$. Alors $q \leq \frac{a}{b} < q+1$ donc $bq \leq a < bq+b$.
En posant $r = a - bq \in \mathbb{Z}$, on a $0 \leq r < b$. Comme r et b sont des entiers, on en déduit $0 \leq r \leq b-1$.

Unicité : Soient q_1, q_2, r_1, r_2 des entiers tels que $\begin{cases} a = bq_1 + r_1 \\ 0 \leq r_1 \leq b-1 \end{cases}$
et $\begin{cases} a = bq_2 + r_2 \\ 0 \leq r_2 \leq b-1 \end{cases}$. Alors $r_1 - r_2 = (a - bq_1) - (a - bq_2) = b(q_2 - q_1)$,
et $-(b-1) \leq r_1 - r_2 \leq (b-1)$. Mais le seul multiple de b qui est entre $-(b-1)$ et $(b-1)$ est 0, donc $r_1 - r_2 = 0$.
On en déduit $r_1 = r_2$ et $q_1 = q_2$.

Exercice 3.2 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.

a) On a $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $\lfloor y \rfloor \leq y$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y$. Or $\lfloor x+y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $x+y$, donc $\underline{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor}$.
De même, $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$, donc $x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.
Or $\lfloor x+y \rfloor \leq x+y$, donc $\lfloor x+y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. Comme les deux membres de la dernière égalité sont des entiers, on obtient
$\underline{\lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1}$.

b) On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n$.
De même qu'en a), on en déduit $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq n\lfloor x \rfloor + n - 1$.
Alors $\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq \lfloor x \rfloor + \frac{n-1}{n}$. Or $\lfloor x \rfloor$ est un entier, et $\frac{n-1}{n} < 1$.
Comme $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$ est l'unique entier k tel que $k \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < k+1$, on obtient
$$\underline{\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}.$$

Exercice 3.3 On suppose $b-a>3$, c'est-à-dire $a+3<b$.

On a $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1 < \lfloor a \rfloor + 2 < \lfloor a \rfloor + 3 \leq a+3 < b$.

Donc $\lfloor a \rfloor+1$, $\lfloor a \rfloor+2$ et $\lfloor a \rfloor+3$ sont des entiers distincts, qui appartiennent tous à l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Exercice 3.4

a)
$$\begin{array}{r|l} 219 & 13 \\ \cline{2-2} 89 & 16,84 \\ 110 & \\ 6 & \end{array}$$

$d_2^-(219/13) = \underline{\underline{16,84}}$

b)
$$\begin{array}{r|l} 50 & 21 \\ \cline{2-2} 80 & 0,238 \\ 170 & \\ 2 & \end{array}$$

$d_3^+(5/21) = \underline{\underline{0,239}}$

Exercice 3.5

Supposons que $\log_{10}(2) = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Comme $2>1$, on a en fait $\log_{10}(2)>0$ donc $a \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $10^{a/b} = 2$, donc $10^a = 2^b$, c'est-à-dire $2^a 5^a = 2^b 5^0$. Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, ceci implique $a=b$ et $a=0$, ce qui contredit les hypothèses.

On a montré, par l'absurde, que $\log_{10}(2) \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3.6

a) $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}\}$. Pour tout entier n non nul, on a $|n| \geq 1$, donc $|\frac{1}{n}| \leq 1$, c'est-à-dire $-1 \leq \frac{1}{n} \leq 1$. Or -1 et $+1$ appartiennent à l'ensemble A, donc $\underline{\underline{\inf A = \min A = -1}}$ et $\underline{\underline{\sup A = \max A = 1}}$.

b) On a $\underline{\underline{\inf B = \min B = 0}}$. Par ailleurs, B est majoré par $\sqrt{2}$. De plus, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{2} - \varepsilon < r \leq \sqrt{2}$ (appliquer le théorème du cours avec $(\sqrt{2}-\frac{\varepsilon}{2}) - \frac{\varepsilon}{4}$ et $(\sqrt{2}-\frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{4}$). Donc il existe $r \in B$ tel que $r > \sqrt{2} - \varepsilon$. Par le théorème de caractérisation du supremum, on obtient $\underline{\underline{\sup B = \sqrt{2}}}$.

Exercice 3.6

c) $C = \{(-1)^n n \,;\; n \in \mathbb{N}^*\}$. L'ensemble C contient tous les entiers strictement positifs pairs, et tous les entiers négatifs impairs. Or $\mathbb{Z}$ n'est ni minoré, ni majoré. Donc C n'est ni minoré, ni majoré : il n'a donc ni infimum, ni supremum.

d) $D = \{3 - \frac{2}{n} \,;\; n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$. Clairement $\inf D = \min D = 3 - \frac{2}{1} = 1$. Par ailleurs 3 est un majorant de D. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, si on pose $n = \lfloor 2\varepsilon \rfloor + 1$, on a $2\varepsilon < n$, d'où $3 - \frac{2}{n} > 3 - \varepsilon$. Par le théorème de caractérisation du supremum, on obtient $\sup D = 3$.

e) Par les mêmes méthodes, pour $E = \{(-1)^n (3 - \frac{2}{n}) \,;\; n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$, on prouve que $\inf E = -3$ et $\sup E = 3$.

Exercice 3.7 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

a) Notons $a = \sup A$ et $b = \sup B$. Pour tout $x \in A \cup B$, deux cas se présentent. Si $x \in A$, alors $x \leq a \leq \max\{a, b\}$. Si $x \in B$, alors $x \leq b \leq \max\{a, b\}$. Donc la partie $A \cup B$ est majorée par $\max\{a, b\}$. De plus A est non vide. Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$, donc $A \cup B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

b) Nous avons prouvé que $\max\{a, b\}$ est un majorant de $A \cup B$. Prouvons maintenant que c'est le plus petit.
On peut avoir $a \geqslant b$ ou $a \leq b$. Comme les ensembles A et B jouent des rôles parfaitement symétriques dans cet exercice, nous pouvons, par exemple, supposer $a \geqslant b$ et donc $\max\{a, b\} = a$.
Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que $m < \max\{a, b\}$. Alors $m < a$, donc m n'est pas un majorant de A. Mais alors, comme $A \subseteq A \cup B$, m n'est pas non plus un majorant de $A \cup B$.
Ainsi $\max\{a, b\}$ est le plus petit majorant de $A \cup B$, et :

$$\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

c) Supposons $A \cap B$ non vide. On a $A \cap B \subseteq A$, donc $A \cap B$ est majorée par $\sup A$. De même, $A \cap B$ est majorée par $\sup B$. Donc

$$\underline{\underline{\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}}}.$$

Exercice 3.8

a) A et B sont non vides : il existe $x \in A$ et $y \in B$. Alors $x+y \in A+B$, donc $A+B$ est non vide.

Soit $z \in A+B$. Alors il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $z = x+y$.

Or on a $x \leq \sup A$ et $y \leq \sup B$, donc $z \leq \sup A + \sup B$.

Ainsi $A+B$ est majorée par $\sup A + \sup B$.

b) On va utiliser la caractérisation du supremum.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors on a $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, donc il existe $x \in A$ tel que $x > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$, et il existe $y \in B$ tel que $y > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}$.

On obtient $x+y \in A+B$, et $x+y > \sup A + \sup B - \varepsilon$.

On a donc prouvé que $\underline{\underline{\sup(A+B) = \sup A + \sup B}}$.

c) Si on prend $A = B = \mathbb{R}_{\leq 0}$, parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, on a $A \cdot B = \mathbb{R}_{\geq 0}$, qui n'est pas majorée.

On peut prouver que

$$A \cdot B \text{ est majorée} \iff \begin{array}{c} A \text{ et } B \text{ sont bornées} \\ \text{ou} \\ A \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ ou } B \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \end{array}$$

Si on prend $A = B = [-1, 0]$, on a $A \cdot B = [0, 1]$, donc $\sup A \cdot B = 1 \neq 0 = \sup A \cdot \sup B$.