Série 2

Nombres entiers

Exercice 1.12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$.

Exercice 1.13 * Soient n et p deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

Exercice 1.14 Pour un entier $n \geqslant 1$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ en fonction de l'entier n (ici $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière, par défaut, du nombre réel x.

Exercice 1.15 Déterminer le dernier chiffre, puis les deux derniers chiffres de l'écriture décimale du nombre $S = 0! + 1! + 2! + \ldots + 2013!$.

Exercice 1.16 Montrer que le produit des n premiers entiers pairs positifs est $2^n n!$. En déduire une formule pour le produit des n premiers entiers impairs positifs.

Exercice 1.17 ♣ Si a et b sont deux entiers naturels (c'est-à-dire positifs ou nuls), on dit que a divise b, et on note $a|b$, si, et seulement si, $\exists n \in \mathbb{Z},\ b = na$. On appelle cette relation la divisibilité.
a) Sur le modèle du cours sur la relation $\leqslant$, montrer que la divisibilité des entiers naturels est une relation réflexive, transitive et antisymétrique, mais que ce n'est pas un ordre total.
b) * Préciser le plus petit et le plus grand élément de l'ensemble $\mathbb{N}$ pour cet ordre.

Exercice 1.18 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ et $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

Exercice 1.19 On pose $a_0 = \frac{1}{4}$ et, pour $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

Exercice 1.20 Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ est un multiple de 9.

Exercice 1.21 Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels compris dans l'intervalle $[-1, 0]$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Plus difficile : dans quel(s) cas cette inégalité devient-elle une égalité ?

Exercice 1.22 ♣ * Soit $C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad C(n, 0) = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^* \quad C(0, p) = 0 \\ \forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad C(n, p) = C(n-1, p) + C(n-1, p-1) \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $C(n, p) = \binom{n}{p}$.

Exercice 1.23 ♣♣
Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_i$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$.
a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.
b) * En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n$.

Exercice 1.24 Développer les sommes et produits suivants

$$\sum_{k=3}^{9}(2k+1) \quad ; \quad \sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{3}(i+j)) \quad ; \quad \sum_{i=2}^{5}(\prod_{k=1}^{i-1}(k^2+1)) \quad ; \quad \sum_{n=7}^{2}(n^3-2n+8).$$

Exercice 1.25 Soit $n \geqslant 0$ un entier fixé. Simplifier les expressions suivantes

$$\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2-k^2] \qquad ; \qquad \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$$