## Série 2

# Nombres entiers

**Exercice 1.12** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$.

**Exercice 1.13** * Soient $n$ et $p$ deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

*Solution. Soit $p \geqslant 0$ un entier fixé. Pour un entier $n \geqslant p$, on note $P(n)$ la proposition : «$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$». On va montrer $P(n)$ par récurrence sur $n$.*

*(I) Pour $n = p$, on a $\binom{n+1}{p+1} \binom{p+1}{p+1} = 1 = \binom{p}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$. Donc $P(p)$ est vraie.*

*(H) Soit $n \geqslant p$ fixé, et supposons $P(n)$ vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On calcule*

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

*Donc P(n+1) est vraie, et l'hérédité est prouvée.*

*(C) Par le théorème de la récurrence, on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant p$.*

**Exercice 1.14** Pour un entier $n \geqslant 1$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ en fonction de l'entier $n$ (ici $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière, par défaut, du nombre réel $x$.

*Solution. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. On fait un groupement de termes.*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0^2}^{1^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor + \sum_{k=1^2}^{2^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor + \sum_{k=2^2}^{3^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor + \cdots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \Big( \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor \Big). \end{aligned}$$

*Pour un entier $i$ fixé, on a $\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = i[(i+1)^2 - i^2] = i(2i+1)$, car il s'agit de la somme de $2i+1$ termes tous égaux à $i$. Donc*

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} i(2i+1) = 2\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \sum_{i=0}^{n-1} i = 2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2},$$

*où les deux formules de sommes de puissances viennent du devoir maison. Finalement,*

$$S_n = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.$$

**Exercice 1.15** Déterminer le dernier chiffre, puis les deux derniers chiffres de l'écriture décimale du nombre $S = 0! + 1! + 2! + \ldots + 2013!$.

**Exercice 1.16** Montrer que le produit des $n$ premiers entiers pairs positifs est $2^n n!$. En déduire une formule pour le produit des $n$ premiers entiers impairs positifs.

*Solution. On note $P_n = 2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ et $Q_n = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$. On met $n$ fois le nombre 2 en facteur dans le produit $P_n$ pour obtenir $P_n = 2^n n!$. On calcule $P_n Q_n = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n) = (2n)!$, et on en déduit*

$$Q_n = \frac{(2n)!}{P_n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

**Exercice 1.17** ♣ Si $a$ et $b$ sont deux entiers naturels (c'est-à-dire positifs ou nuls), on dit que $a$ divise $b$, et on note $a|b$, si, et seulement si, $\exists n \in \mathbb{Z},\ \ b = na$. On appelle cette relation la divisibilité.
**a)** Sur le modèle du cours sur la relation $\leqslant$, montrer que la divisibilité des entiers naturels est une relation réflexive, transitive et antisymétrique, mais que ce n'est pas un ordre total.
**b)** * Préciser le plus petit et le plus grand élément de l'ensemble $\mathbb{N}$ pour cet ordre.

**Exercice 1.18** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, on note $f^{(n)}$ sa dérivée $n$-ième. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$, on a $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ et $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

*Solution. Pour un entier $n \geqslant 0$, on note $P(n)$ la proposition : « $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ ». On va montrer $P(n)$ par récurrence sur $n$.*

*(I) Pour $n = 0$ et pour tout réel $x$, on a $\sin^{(0)}(x) = \sin x$ par définition. Donc $P(0)$ est vraie.*

*(H) Soit $n \geqslant 0$ fixé, et supposons $P(n)$ vraie. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Pour $x \in \mathbb{R}$, on calcule*

$$\sin^{(n+1)}(x) = [\sin^{(n)}]'(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

*par la formule de dérivation des fonctions composée. Or, pour tout réel $a$, on sait que $\cos(a) = \sin(a + \frac{\pi}{2})$. On obtient donc*

$$\sin^{(n+1)}(x) = \sin[x + (n+1)\frac{\pi}{2}].$$

*Donc P(n+1) est vraie, et l'hérédité est prouvée.*

*(C) Par le théorème de la récurrence, on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.*

*On raisonne de même pour la fonction cosinus.*

**Exercice 1.19** On pose $a_0 = \frac{1}{4}$ et, pour $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

*Solution. Pour un entier $n \geqslant 0$, on note $P(n)$ la proposition : « $a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right)$ ». On va montrer $P(n)$ par récurrence sur $n$.*

*(I) Pour $n = 0$ et pour tout réel $x$, on a $a_0 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^0}}\right)$. Donc $P(0)$ est vraie.*

*(H) Soit $n \geqslant 0$ fixé, et supposons $P(n)$ vraie. Alors $a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right)$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On calcule*

$$a_{n+1} = 2a_n(1-a_n) = 2\times\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right)\right] = \left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right)\times\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right),$$

*d'où $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)$. Donc P(n+1) est vraie, et l'hérédité est prouvée.*

*(C) Par le théorème de la récurrence, on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.*

**Exercice 1.20** Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ est un multiple de 9.

**Exercice 1.21** Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels compris dans l'intervalle $[-1, 0]$. Montrer que
$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
Plus difficile : dans quel(s) cas cette inégalité devient-elle une égalité ?

*Solution. Pour un entier $n \geqslant 1$, on note $P(n)$ la proposition : « pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$ dans l'intervalle $[-1, 0]$, on a $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ ». On va montrer $P(n)$ par récurrence sur $n$.*

*(I) Pour $n = 1$ et pour tout réel $a_1$, on a $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = 1 + a_1 = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$. Donc $P(0)$ est vraie.*

*(H) Soit $n \geqslant 1$ fixé, et supposons $P(n)$ vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Si $a_1, \ldots, a_{n+1}$ sont des réels dans l'intervalle $[-1, 0]$, on a par hypothèse de récurrence*
$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$
*En multipliant par le nombre positif $(1 + a_{n+1})$, on obtient*
$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) \geqslant (1+a_{n+1})(1+\sum_{k=1}^{n} a_k) = 1 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + a_{n+1}a_1 + \ldots + a_{n+1}a_n.$$
*Les réels $a_{n+1}a_1, \ldots, a_{n+1}a_n$ sont positifs car ce sont des produits de deux réels négatifs. On en déduit*
$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+a_k) \geqslant 1 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k.$$
*Donc P(n+1) est vraie, et l'hérédité est prouvée.*

*(C) Par le théorème de la récurrence, on conclut que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.*

*Étudions si l'inégalité qu'on vient de prouver peut être une égalité. Si l'un des réels $a_1, \ldots, a_n$ est égal à $-1$ (par exemple $a_1 = -1$), alors le produit de gauche est nul. Pour qu'il y ait l'égalité, on doit avoir $1 + a_1 + \ldots + a_n = 0$. Or $1 + a_1 = 0$, et les autres termes de la somme sont négatifs ou nuls. La seule possibilité est donc que $a_2, \ldots, a_n$ soient tous nuls.*

*Supposons maintenant que tous les réels $a_1, \ldots, a_n$ sont différents de $-1$, et que deux au moins d'entre eux sont non nuls (par exemple $a_1$ et $a_2$). Si $n \geqslant 2$, on obtient alors $(1 + a_1)(1 + a_2) = 1 + a_1 + a_2 + a_1a_2 > 1 + a_1 + a_2$, et on peut adapter la preuve ci-dessus pour montrer que cette inégalité stricte se transmet par récurrence jusqu'à obtenir $\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$.*

*On a montré que, si l'inégalité de l'exercice est une égalité, alors tous les réels $a_1, \ldots, a_n$ sont nuls sauf peut-être un seul d'entre eux. La réciproque est facile à vérifier. En conclusion, l'inégalité de l'exercice est une égalité si, et seulement, tous les réels $a_1, \ldots, a_n$ sont nuls sauf peut-être un seul d'entre eux.*

**Exercice 1.22** ♣ * Soit $C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application telle que :
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad C(n,0) = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^* \quad C(0,p) = 0 \\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad C(n,p) = C(n-1,p) + C(n-1,p-1) \end{cases}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $C(n,p) = \binom{n}{p}$.

**Exercice 1.23** ♣♣

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_i$ et $w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$.

**a)** Montrer que $\sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $i \in [\![1, n-1]\!]$.

**b)** * En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n$.

**Exercice 1.24** Développer les sommes et produits suivants

$$\sum_{k=3}^{9}(2k+1) \quad ; \quad \sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{3}(i+j)) \quad ; \quad \sum_{i=2}^{5}(\prod_{k=1}^{i-1}(k^2+1)) \quad ; \quad \sum_{n=7}^{2}(n^3-2n+8).$$

*Solution.*

$$\sum_{k=3}^{9}(2k+1) = 7+9+11+13+15+17+19$$

$$\sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{3}(i+j)) = (2+3+4)+(3+4+5)+(4+5+6)$$

$$\sum_{i=2}^{5}(\prod_{k=1}^{i-1}(k^2+1)) = 2+2.5+2.5.10+2.5.10.17$$

$$\sum_{n=7}^{2}(n^3-2n+8) = 0 \qquad \textit{car } 7>2.$$

**Exercice 1.25** Soit $n \geqslant 0$ un entier fixé. Simplifier les expressions suivantes

$$\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2-k^2] \qquad ; \qquad \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$$

*Solution. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2-k^2]$. Alors*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=0}^{n}k^2 = \sum_{p=1}^{n+1}p^2 - \sum_{k=0}^{n}k^2,$$

*car on a fait le changement d'indice $p = k+1$ dans la première somme ; quand $k$ varie de $0$ à $n$, $p$ varie de $1$ à $n+1$. En séparant le terme $p = n+1$ de la première somme et le terme $k = 0$ de la deuxième, on obtient*

$$S_n = (n+1)^2 + \sum_{p=1}^{n}p^2 - \sum_{k=1}^{n}k^2 - 0^2 = (n+1)^2,$$

*car les deux sommes du mileu sont égales, même si elle sont écrites avec des indices différents. Par exactement la même méthode, on trouve*

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$