Série 1

Éléments de logique et de théorie des ensembles

Exercice 1.1 Donner la valeur de vérité (VRAI ou FAUX) de chacune des propositions suivantes :

a) $0 = 0$ *et* $2 + 2 = 5$ **b)** $0 = 0$ *ou* $2 + 2 = 5$
c) $0 = 0 \Rightarrow 2 + 2 = 5$ **d)** $0 = 0 \Rightarrow 2 + 2 = 4$
e) $0 = 1 \Rightarrow 2 + 2 = 5$ **f)** $0 = 1 \Rightarrow 2 + 2 = 4$
g) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$ **h)** $\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$
i) $\forall x \in \mathbb{R},\ [x \geqslant 0 \Rightarrow x + 2 = 4]$ **k)** $\exists x \in \mathbb{R},\ [x \geqslant 0 \Rightarrow x + 2 = 4]$

Exercice 1.2 Exprimer, sous forme de réunions d'intervalles, le plus simplement possible, les parties de $\mathbb{R}$ définies par les conditions suivantes (sur le réel x), ainsi que leur complémentaire dans $\mathbb{R}$:

a) $[x > -1$ et $x \leqslant 3]$ ou $x \geqslant 0$ **b)** $x \leqslant 5$ et $[x \geqslant 3$ ou $x < 0]$
c) $x^2 \leqslant 2$ et $x^2 \neq 1$ **d)** $x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 > 9$

Exercice 1.3 Soit x un réel. Que peut-on conclure des propositions suivantes ?

a) $\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$ **b)** $\exists \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$ **c)** $\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon$

Exercice 1.4 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ *non singulier* (c'est-à-dire contenant au moins deux points), et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes, et leurs négations :

a) «f est l'application nulle» **b)** «f s'annule»
c) «f est à valeurs strictement positives» **d)** «f est constante»

Exercice 1.5 On considère maintenant une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer en langage courant, le plus simplement possible, les propositions suivantes. On remarquera que l'ordre et le choix des quantificateurs sont fondamentaux pour déterminer le sens d'une proposition logique.

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$ **b)** $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$.
c) $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$ **d)** $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$.

Exercice 1.6 Ecrire la négation de chacune des propositions logiques énoncées dans les exercices précédents (la négation de la proposition P est la proposition Q qui est vraie si, et seulement si, la proposition Q est fausse).

Exercice 1.7 * Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 1.8 Déterminer, en énumérant leurs éléments, les ensembles : $\mathscr{P}(\varnothing)$, $\mathscr{P}(\{0,1\})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{0,1\}))$.

Exercice 1.9 Déterminer l'ensemble :

$$B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(x) + f(y)\}.$$

Exercice 1.10 Déterminer l' ensemble :

$$A = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2xy + y^4 = 0\}.$$

Exercice 1.11 **a)** Qu'est-ce qu'une application paire ? une application impaire ?
b) Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle soit paire, soit impaire ?
c) Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à la fois paires et impaires.
d) * Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer qu'il existe un unique couple (φ, ψ) d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que φ soit paire, ψ impaire et $f = \varphi + \psi$.