Recueil d'exercices - MAT 1120

Corrigés

Exercice 1.1

VRAI : b, d, e, f, h, k FAUX : a, c, g, i

Exercice 1.2

a) $A =]-1, +\infty[$ $\bar{A} =]-\infty, -1]$

b) $A =]-\infty, 0[\cup [3,5]$ $\bar{A} = [0,3[\cup]5, +\infty[$

c) $A = [-\sqrt{2}, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \sqrt{2}]$ $\bar{A} =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup \{-1\} \cup \{1\} \cup]\sqrt{2}, +\infty[$

d) $A =]-\infty, 1] \cup]3, +\infty[$ $\bar{A} =]1, 3]$

Exercice 1.3

a) $x \leq 0$ b) rien : x est un réel quelconque. c) $x = 0$

Exercice 1.4

a) $\forall x \in I, \ f(x) = 0$ b) $\exists x \in I, \ f(x) = 0$

c) $\forall x \in I, \ f(x) > 0$ d) $\exists c \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I, \ f(x) = c$

ou $\forall (x,y) \in I^2, \ f(x) = f(y)$

Exercice 1.5

a) rien : f est une fonction quelconque.

b) f est une fonction constante.

c) f est une fonction surjective, c'est-à-dire $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

d) Cette proposition est toujours fausse : pour x fixé, $f(x)$ n'a qu'une vale

Exercice 1.6

1.1 a) $0 \neq 0$ ou $2+2 \neq 5$ b) $0 \neq 0$ et $2+2 \neq 5$ c) $0 = 0$ et $2+2 \neq 5$ d) e) f) idem

g) $\exists x \in \mathbb{R}, \ x = 1$ h) $\forall x \in \mathbb{R}, \ x = 1$ i) $\exists x \in \mathbb{R}, \ (x \geq 0$ et $x + 2 \neq 4)$

1.5 a) $\exists x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ f(x) \neq y$ b) $\forall y \in \mathbb{R}, \ \exists x \in \mathbb{R}, \ f(x) \neq y$ c) d) idem

1.4 d) $\forall c \in \mathbb{R}, \ \exists x \in I, \ f(x) \neq c$ ou $\exists (x,y) \in I^2, \ f(x) \neq f(y)$.

Exercice 1.7

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $A=B$, alors $A\cup B = A = A\cap B$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A\cup B = A\cap B$. Soit $x\in A$. Alors $x\in A\cup B$, donc $x\in A\cap B$. Mais alors $x\in$
On a ainsi prouvé $A\subseteq B$. Symétriquement, on a $B\subseteq A$, donc $A=B$.

Exercice 1.8

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\})) = \Big\{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0,1\}\},$
$\{\emptyset,\{0\}\}, \{\emptyset,\{1\}\}, \{\emptyset,\{0,1\}\}, \{\{0\},\{1\}\}, \{\{0\},\{0,1\}\}, \{\{1\},\{0,1$
$\{\emptyset,\{0\},\{1\}\}, \{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}, \{\emptyset,\{1\},\{0,1\}\}, \{\{0\},\{1\},\{0,1\}\},$
$\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\} \Big\}$.

Exercice 1.9

Analyse: Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction telle que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(x)+f(y)$.
En particulier, pour $x=y=0$, on a $f(0)^2 = 2f(0)$, c'est-à-dire
$f(0)(f(0)-2)=0$. Ainsi $f(0)=0$ ou 2.

Cas 1 $f(0)=0$. Pour $x\in\mathbb{R}$ quelconque et $y=0$, on a $f(x)\times 0 = f(x)+0$,
d'où $f(x)=0$. Ainsi f est la fonction nulle.

Cas 2 $f(0)=2$. Pour $x\in\mathbb{R}$ quelconque et $y=0$, on a $2f(x) = f(x)+2$
d'où $f(x)=2$. Ainsi f est la fonction constante de valeur 2

Synthèse: Soit $f=\tilde{0}$, la fonction nulle. Alors $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = 0 = f(x)+f($
Soit $f=\tilde{2}$, constante de valeur 2. Alors $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x)f(y) = 4 = f(x)+f$

Conclusion: Par double inclusion, on a prouvé $B=\{\tilde{0},\tilde{2}\}$.

Exercice 1.10

On raisonne par équivalence. Soit $y\in\mathbb{R}$.

$y\in A \iff \exists x\in\mathbb{R},\ x^2+2xy+y^4=0$

$\iff$ L'équation $x^2+2xy+y^4$, d'inconnue x, a au moins une solution réelle.

$\iff$ Le discriminant $\Delta = (2y)^2-4.1.y^4$ est positif ou nul.

$\iff y^2(1-y^2)\geqslant 0$

$\iff y^2\in[0,1]$

$\iff y\in[-1,1]$.

Ainsi $A=[-1,1]$.