Série 10

Séries numériques et séries entières

Exercice 10.1 On considère la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n$, où $u_n = \ln \frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$. Montrer que cette série est convergente, et calculer sa somme.

Indication : utiliser l'égalité $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ *pour faire de* $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *une série télescopique.*

Exercice 10.2 Utiliser le critère de D'Alembert pour étudier la convergence des séries

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{5^n}{n!} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{1024^n} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^n}{3^n n!}.$$

Exercice 10.3 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante à valeurs positives. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $v_n = 2^n u_{2^n}$.

a) En regroupant habilement les termes de la somme du milieu, montrer l'encadrement

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} u_{2^{i-1}} \leqslant \sum_{k=1}^{2^n} u_k \leqslant \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} u_{2^i}.$$

b) On suppose la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergente. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

c) On suppose la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ divergente. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

Exercice 10.4 Utiliser l'exercice précédent pour étudier la convergence des séries :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}.$$

Exercice 10.5 Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?

Exercice 10.6 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n(n^2+1)}{2n} x^n$.