Exercices corrigés - MAT 1120

Série 10

Exercice 10.1

Pour tout entier $n \geq 2$, on a $u_n = \ln \frac{n}{n-1} - \ln \frac{n+1}{n}$.

Donc, pour tout entier $n \geq 2$, on calcule

$$\sum_{k=2}^{n} u_k = \left(\ln \frac{2}{1} - \ln \frac{3}{2}\right) + \left(\ln \frac{3}{2} - \ln \frac{4}{3}\right) + \dots + \left(\ln \frac{n}{n-1} - \ln \frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \ln \frac{2}{1} - \ln \frac{n+1}{n} \quad \text{car la somme est "télescopique".}$$

Or $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc, par continuité de la fonction $\ln$, $\ln \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln 1$.

On en déduit (somme de suites convergentes) :

$$\sum_{k=2}^{n} u_k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln \frac{2}{1} - \ln 1 = \ln 2.$$

Donc la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge, et sa somme vaut $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 10.2

* $u_n = \frac{5^n}{n!} > 0$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Par le critère de D'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{5^n}{n!}$ converge.

* $u_n = \frac{n^n}{1024^n} > 0$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n . 1024} \geq \frac{n+1}{1024}$. Par le théorème des gendarmes, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Donc, par le critère de D'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{1024^n}$ est grossièrement divergente.

* $u_n = \frac{n^n}{3^n n!} > 0$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n . 3 . (n+1)} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

  On sait que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{e}{3} < 1$. Par le critère de D'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{3^n n!}$ est donc convergente.

Exercice 10.3

$(u_n)_{n\geq 1}$ décroissante positive. $\forall n \geq 0$, $v_n = 2^n u_{2^n}$.

a) On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{2^n} u_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=2^{i-1}+1}^{2^i} u_k \right)$

$$\left[= (u_2) + (u_3 + u_4) + (u_5 + \dots + u_8) + \dots + (u_{2^{n-1}+1} + \dots + u_{2^n}) \right]$$

Or, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on a

$$2^{i-1} u_{2^i} = \sum_{k=2^{i-1}+1}^{2^i} u_{2^i} \leq \sum_{k=2^{i-1}+1}^{2^i} u_k \leq \sum_{k=2^{i-1}+1}^{2^i} u_{2^{i-1}} = 2^{i-1} u_{2^{i-1}},$$

car la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} u_{2^i} \leq \sum_{k=2}^{2^n} u_k \leq \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} u_{2^{i-1}}.$$

b) On suppose la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergente. Comme elle est à termes positifs, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} v_k \leq M$. Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} u_k &\leq \sum_{k=1}^{2^n} u_k \quad \text{(car } n \leq 2^n \text{ et les } u_k \text{ sont positifs)} \\
&\leq u_1 + \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} u_{2^{i-1}} \quad \text{(d'après le a))} \\
&\leq u_1 + \sum_{i=1}^{n} v_{i-1} \\
&\leq u_1 + \sum_{j=0}^{n-1} v_j \quad \text{(en posant } j = i-1\text{)} \\
&\leq u_1 + M.
\end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\geq 1}$ est majorée par la constante $u_1 + M$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est à termes positifs, on en déduit qu'elle converge.

c) On suppose la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ divergente. Comme elle est à termes positifs, on a $\sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Or, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{2^n} u_k \geq u_1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{v_k}{2} - \frac{v_0}{2} \quad \text{(d'après a))}.$$

Par le théorème des gendarmes, on obtient $\sum_{k=1}^{2^n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. La suite $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\geq 1}$ est donc divergente, et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

Exercice 10.4

* Si $u_n = \frac{1}{n}$, alors $v_n = 2^n u_{2^n} = 1$. La série $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge grossièrement, donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

* Si $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$, alors $v_n = \frac{2^n}{2^n \ln(2^n)} = \frac{1}{n\ln 2}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\ln 2}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

* Si $u_n = \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$, alors $v_n = \frac{2^n}{2^n . n\ln 2 . \ln(n\ln 2)} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{n[\ln n + \ln(\ln 2)]}$.

Alors $\forall n \geq 2$, $2^n v_{2^n} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^n}{2^n[n\ln 2 + \ln(\ln 2)]} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{n\ln 2 + \ln(\ln 2)}$.

En notant $w_n = 2^n v_{2^n}$, on trouve $2^n w_{2^n} = \frac{1}{(\ln 2)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\ln(\ln 2)}{2^n \ln 2}} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

La série $\sum 2^n w_{2^n}$ est grossièrement divergente, donc la série $\sum w_n$ est divergente, donc la série $\sum v_n$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.

Exercice 10.5

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est donc convergente.

Si on note $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $2^n u_{2^n} = \sqrt{2}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. La série $\sum_{n\geq 1} 2^n u_{2^n}$ est grossièrement divergente donc, par l'exercice 10.3, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est donc pas absolument convergente.

Exercice 10.6

Pour tout $n \geq 1$, notons $a_n = \frac{3^n(n^2+1)}{2n}$.

Alors $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3 \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{[(n+1)^2+1]}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$. Par le critère de D'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ est donc :

$$R = \frac{1}{3}.$$