Definition
Théorème
Axiome / corollaire

Test 3

*rappel

Définition d'une limite: Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite et ℓ un réel.
la suite converge vers ℓ ($u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$) si
$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \geqslant n_0, \forall n \geqslant n_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$

b) limites infinies

Droite réelle achevée : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Voisinage

Soit $a \in \mathbb{R}$ un nombre fixé. Pour $\varepsilon > 0$, on dit que l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ est un voisinage de a s'il existe $\varepsilon > 0$ t.q. $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subseteq V$

→ Pour $A \in \mathbb{R}$, l'intervalle $[A, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$

→ Pour $B \in \mathbb{R}$, l'intervalle $]-\infty, B[$ est un voisinage de $-\infty$ dans $\mathbb{R}$

→ Si a est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, $V(a)$ est l'ensemble des voisinages du point a.

Limite dans $\mathbb{R}$

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ admet a pour limite ($u_n \longrightarrow a$) si : $\forall V \in V(a), \exists n_1 \geqslant n_0, \forall n \geqslant n_1, u_n \in V$

- Si $a \in \mathbb{R}$, $u_n \longrightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon >, \exists n_1 \geqslant n_0, \forall n \geqslant n_1, |u_n - a| \leq \varepsilon$
- Si $a = +\infty$, $u_n \longrightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_1 \geqslant n_0, \forall n \geqslant n_1, u_n \geqslant A$
- Si $a = -\infty$, $u_n \longrightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists n_1 \geqslant n_0, \forall n \geqslant n_1, u_n \leq B$

Théorème du gendarme pour les suites infinies

Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles

i) $\left.\begin{array}{l} \forall n \geqslant n_0, u_n \leq v_n \\ u_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} v_n \longrightarrow +\infty$

ii) $\left.\begin{array}{l} \forall n \geqslant n_0 \quad u_n \leq v_n \\ v_n \longrightarrow -\infty \end{array}\right\} u_n \longrightarrow -\infty$

c) limite et ordre

Théorème du caractère minoré, majoré d'une suite

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle

i) u_n converge $\Rightarrow u$ est bornée

ii) $u \longrightarrow +\infty \Rightarrow u$ est minorée mais pas majorée

iii) $u \longrightarrow -\infty \Rightarrow u$ est majorée mais pas minorée

Corollaire (unicité de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$)

Si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite et ℓ, ℓ' deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ t.q. $u_n \longrightarrow \ell$ et $u_n \longrightarrow \ell'$ alors $\ell = \ell'$

Théorème du passage à la limite dans les inégalités

Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites convergentes

Si $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leq v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_n$

***Rappel** (pour suite convergente et divergente)

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle. On distingue 3 situations

1) $u_n \longrightarrow \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$ (limite finie)

la suite u est convergente

2) $u_n \longrightarrow +\infty$ ou $u_n \longrightarrow -\infty$ (limite infinie)

la suite u est divergente de « première espèce »

3) $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'a aucune limite

la suite u est divergente de « deuxième espèce »

d) suites extraites (ou sous-suites)

Extractrice

Soit n_0 et n_1 deux entiers. Une fonction $\varphi : \mathbb{Z}_{n\geqslant 1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ est une extractrice si elle est strictement croissante

Extraite

Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ deux suites. On dit que $(v_n)_{n\geqslant n_1}$ est extraite de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ s'il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{Z}_{\geqslant n_1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geqslant n_0}$ t.q. $\forall n \geqslant n_1$, $v_n = u_{\varphi(n)}$

(c-à-d $v = (u_{\varphi(n)})_{n\geqslant n_1}$)

Théorème des suites extraites

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite réelle et $\varphi : \mathbb{Z}_{\geqslant n_1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geqslant n_0}$ une extractrice

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ alors $u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$

Théorème qui déduit la convergence d'une suite à partir de celle de 2 suite extraites

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

si $\begin{cases} u_{2n} \longrightarrow \ell \\ u_{2n+1} \longrightarrow \ell \end{cases}$ alors $u_n \longrightarrow \ell$

II - Comment « calculer » une limite ?

a) Limites et opérations

Théorème de la somme

Soient $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ deux suites

i) si $\begin{cases} u_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R} \\ v_n \longrightarrow \ell' \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $(u_n + v_n) \longrightarrow \ell + \ell'$

ii) si $\begin{cases} u_n \longrightarrow +\infty \\ v_n \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ alors $(u_n + v_n) \longrightarrow +\infty$

iii) si $\begin{cases} u_n \longrightarrow -\infty \\ v_n \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ alors $(u_n + v_n) \longrightarrow -\infty$

Théorème opposé

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite. Si $u_n \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $-u_n \longrightarrow -\ell$ (avec la convention $-(+\infty) = -\infty$ et $-(-\infty) = +\infty$)

Théorème du produit

Soient $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ 2 suites réelles

i) si $\begin{cases} u_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R} \\ v_n \longrightarrow \ell' \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $(u_n \cdot v_n) \longrightarrow \ell \cdot \ell'$

ii) si $\begin{cases} u_n \longrightarrow +\infty \\ v_n \longrightarrow \ell \in]0, +\infty] \end{cases}$ alors $(u_n \cdot v_n) \longrightarrow +\infty$

Théorème de l'inverse

soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite réelle

i) si $u_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

alors $\exists n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \neq 0$

De plus $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow \dfrac{1}{\ell}$

ii) si $u_n \longrightarrow +/- \infty$

alors $\exists n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \neq 0$

De plus $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow 0$

iii) si $u_n \longrightarrow 0$ et si $\exists n_1 \geqslant n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \neq 0$

$\dfrac{1}{|u_n|} \longrightarrow +\infty$

b) Critère de D'Alembert

Théorème du critère de D'Alembert

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite à valeurs strictement positives

i) si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell \in]1, +\infty]$ alors $u_n \longrightarrow +\infty$

ii) si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell \in [0, 1[$ alors $u_n \longrightarrow 0$

iii) si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 1$ alors on ne peut rien dire

c) autres limites à connaître

1) $n^\alpha \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

2) $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$ pour tout $a > 0$

$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$

III - Théorèmes d'existence de la limite

a) Théorème sur les limites de suites monotones

Théorème sur les limites de suites monotones (croissante)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite croissante

i) si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est majorée alors elle converge et $\lim u_n = \sup\{u_n ; n \geq n_0\}$

ii) Si la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'est pas majorée $u_n \longrightarrow +\infty$

Théorème sur les limites de suites monotones (décroissante)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite décroissante

i) si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est minorée, alors elle converge et

$\lim u_n = \operatorname{Inf}\{u_n ; n \geq n_0\}$

ii) si $(u_n)_{n \geq n_0}$ n'est pas minorée, alors $u_n \longrightarrow -\infty$

b) suites adjacentes

Suite adjacente

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites

on dit que ces suites sont adjacentes si

$$\begin{cases} (u_n)_{n \geq n_0} \text{ est croissante} \\ (v_n)_{n \geq n_0} \text{ est décroissante} \\ v_n - u_n \longrightarrow 0 \end{cases}$$

Théorème des suites adjacentes

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont 2 suites adjacentes alors elles convergent et ont la même limite.