## Caractère borné d'une suite convergente

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle.

(i) Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, alors elle est bornée

(ii) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée, mais pas majorée

(iii) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée, mais pas minorée

Dem (i)

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite convergente et soit $\ell\in\mathbb{R}$ sa limite.

Alors,

$\forall \varepsilon>0, \exists n_1\geq n_0, \forall n\geq n_1, |u_n-\ell|\leq\varepsilon$

Notons $\varepsilon=1>0$. Alors il existe $n_1\geq n_0$ tel que:

$\forall n\geq n_1, |u_n-\ell|\leq 1$

L'ensemble $U=\{u_{n_0}, u_{n_0+1}, \dots, u_{n_1-1}\}$ est fini. Il y a donc un minimum $a$ et un maximum $b$.

Alors,

$\forall n\in\{n_0, n_0+1, \dots n_1-1\}, a\leq u_n\leq b$

$\forall n\geq n_1, \ell-1\leq u_n\leq \ell+1$

Donc, $\forall n\geq n_0, \min\{a,\ell-1\}\leq u_n\leq \max\{b,\ell+1\}$

La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est donc minorée par $m=\min\{a,\ell-1\}$ et majorée par $M=\max\{b,\ell+1\}$.

Ainsi, $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée.

$\square$

## Convergence d'une somme de suites convergentes

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites.

(i) Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R} \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R} \end{cases}$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l+l'$

(ii) Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \end{cases}$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

(iii) Si $\begin{cases} u_n \longrightarrow -\infty \\ v_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\} \end{cases}$, alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Dem (i)

Soient $l$ et $l'$ réels, et supposons $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$.

Montrons que $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l+l'$

Soit $\varepsilon>0$ fixé. Notons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que
$\forall n \geq n_1, |u_n - l| \leq \varepsilon'$

Comme $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$, il existe $n_2 \geq n_0$ tel que
$\forall n \geq n_2, |v_n - l'| \leq \varepsilon'$

Notons $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$

Pour tout $n \geq n_3$,

$$|(u_n+v_n)-(l+l')| = |u_n - l + v_n - l'| \leq \underbrace{|u_n - l| + |v_n - l'|}_{\text{(inégalité triangulaire)}}$$

$$\leq \underbrace{\varepsilon'}_{\text{car } n\geq n_1} + \underbrace{\varepsilon'}_{\text{car } n\geq n_2}$$

$$\leq 2\varepsilon' = \varepsilon$$

Ainsi, $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l+l'$

$\square$

## Théorème de composition des limites (dans le cas de limites finies en des points finis)

Soient $D$ et $D'$ deux partie de $\mathbb{R}$, et $f:D\to\mathbb{R}$, $g:D'\to\mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose $f(D)\subseteq D$, c'est-à-dire

$$\forall x\in D,\ f(x)\in D'$$

Ainsi, la fonction $g\circ f : D\to\mathbb{R}$ est bien définie.

Soient $a,b,c$ des points dans $\mathbb{R}$

Si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ g(y) \xrightarrow[y\to b]{} c \end{cases}$, alors $g(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} c$

## Dem

On suppose $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$, c'est-à-dire:

$\forall \delta>0, \exists \gamma>0, \forall x\in D, |x-a|\leq\gamma \Rightarrow |f(x)-b|\leq\delta$

On suppose $g(y)\xrightarrow[y\to b]{} c$, c'est-à-dire:

$\forall \varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall y\in D', |y-b|\leq\delta\Rightarrow |g(y)-c|\leq\varepsilon$

Montrons que $g(f(x))\xrightarrow[x\to a]{} c$

Soit $\varepsilon>0$ fixé.

Comme $g(y)\xrightarrow[y\to b]{} c$, il existe $\delta>0$ tel que:

$\forall y\in D', |y-b|\leq\delta \Rightarrow |g(y)-c|\leq\varepsilon$ (1)

Comme $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$, il existe $\gamma>0$ tel que:

$\forall x\in D, |x-a|\leq\gamma\Rightarrow |f(x)-b|\leq\delta$ (2)

Alors, pour tout $x\in D$ tel que $|x-a|\leq\gamma$, on a $f(x)\in D'$ et $|f(x)-b|\leq\delta$ d'après (2)

Alors, en posant $y=f(x)$ dans (1), on obtient $|g(f(x))-c|\leq\varepsilon$

Ainsi,

$\forall\varepsilon>0, \exists\gamma>0, \forall x\in D, |x-a|\leq\gamma\Rightarrow |g(f(x))-c|\leq\varepsilon$

c'est-à-dire,

$g(f(x))\xrightarrow[x\to a]{} c$

$\square$

## Convergence d'une suite croissante et majorée

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante

(i) Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée, alors elle converge et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n, n\geq n_0\}$$

(ii) Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'est pas majorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Dem (i)

On suppose $(u_n)_{n\geq n_0}$ croissante et majorée.
Notons $U=\{u_n ; n\geq n_0\}$ l'ensemble des valeurs de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$

Il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall n\geq n_0, u_n\leq M$

Alors la partie $U$ de $\mathbb{R}$ est majorée par $M$.

De plus, $U$ est non vide car $u_{n_0}\in U$.

D'après l'axiome du supremum, $U$ admet un supremum. Notons $S=\sup U$.

Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$

Soit $\varepsilon>0$ fixé

Par caractérisation du supremum, il existe $x\in U$ tel que $x\geq S-\varepsilon$.

Par définition de $U$, il existe $n_1\geq n_0$ tel que $x=u_{n_1}$

Alors, pour tout $n\geq n_1$, comme la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante, on a :

$$u_n \geq u_{n_1} \geq S-\varepsilon$$

De plus, $u_n\in U$ et $S=\sup U$, donc $u_n\leq S$

Ainsi. $S-\varepsilon\leq u_n\leq S\leq S+\varepsilon$,

d'où $|u_n-S|\leq\varepsilon$

On a prouvé $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$

$\square$