Recueil d'exercices

MAT 1120

Erwan Biland

Département de mathématique et de statistiques
Université Laval - Hiver 2013

Table des matières

Ces quelques exercices viennent compléter les exercices du manuel de référence *Introduction à l'analyse*, de Cassidy et Lavertu. Les étudiants ne sont pas supposer les chercher tous. Chaque semaine, on affichera sur le site du cours une liste d'exercices tirés du manuel et de ce recueil. Une étoile * dans un exercice signifie qu'on peut trouver une indication pour le résoudre à la fin de ce recueil.

Chapitre 1

Les ensembles de nombres

1.1 Propositions logiques et quantificateurs

Exercice 1.1 Donner la valeur de vérité (VRAI ou FAUX) de chacune des propositions suivantes :

a) $0 = 0$ *et* $2 + 2 = 5$
b) $0 = 0$ *ou* $2 + 2 = 5$
c) $0 = 0 \Rightarrow 2 + 2 = 5$
d) $0 = 0 \Rightarrow 2 + 2 = 4$
e) $0 = 1 \Rightarrow 2 + 2 = 5$
f) $0 = 1 \Rightarrow 2 + 2 = 4$
g) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$
h) $\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$
i) $\forall x \in \mathbb{R},\ [x \geqslant 0 \Rightarrow x + 2 = 4]$
k) $\exists x \in \mathbb{R},\ [x \geqslant 0 \Rightarrow x + 2 = 4]$

Exercice 1.2 Exprimer, sous forme de réunions d'intervalles, le plus simplement possible, les parties de $\mathbb{R}$ définies par les conditions suivantes (sur le réel x), ainsi que leur complémentaire dans $\mathbb{R}$:

a) $[x > -1$ et $x \leqslant 3]$ ou $x \geqslant 0$
b) $x \leqslant 5$ et $[x \geqslant 3$ ou $x < 0]$
c) $x^2 \leqslant 2$ et $x^2 \neq 1$
d) $x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 > 9$

Exercice 1.3 Soit x un réel. Que peut-on conclure des propositions suivantes ?

a) $\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$
b) $\exists \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon$
c) $\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon$

Exercice 1.4 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ *non singulier* (c'est-à-dire contenant au moins deux points), et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Ecrire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes, et leurs négations :

a) «f est l'application nulle»
b) «f s'annule»
c) «f est à valeurs strictement positives»
d) «f est constante»

Exercice 1.5 On considère maintenant une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprimer en langage courant, le plus simplement possible, les propositions suivantes. On remarquera que l'ordre et le choix des quantificateurs sont fondamentaux pour déterminer le sens d'une proposition logique.

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$
b) $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y.$
c) $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$
d) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y.$

Exercice 1.6 Ecrire la négation de chacune des propositions logiques énoncées dans les exercices précédents (la négation de la proposition P est la proposition Q qui est vraie si, et seulement si, la proposition Q est fausse).

1.2 Ensembles

Exercice 1.7 * Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Exercice 1.8 Déterminer, en énumérant leurs éléments, les ensembles : $\mathscr{P}(\varnothing)$, $\mathscr{P}(\{0,1\})$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{0,1\}))$.

Exercice 1.9 Déterminer l'ensemble :

$$B = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(x) + f(y)\}.$$

Exercice 1.10 Déterminer l' ensemble :

$$A = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2xy + y^4 = 0\}.$$

Exercice 1.11 **a)** Qu'est-ce qu'une application paire ? une application impaire ?
b) Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle soit paire, soit impaire ?
c) Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à la fois paires et impaires.
d) * Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer qu'il existe un unique couple (φ, ψ) d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que φ soit paire, ψ impaire et $f = \varphi + \psi$.

1.3 Nombres entiers

Exercice 1.12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $u_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$.

Exercice 1.13 * Soient n et p deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que $\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$.

Exercice 1.14 Pour un entier $n \geqslant 1$, calculer la somme $\sum_{k=0}^{n^2-1} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ en fonction de l'entier n (ici $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière, par défaut, du nombre réel x.

Exercice 1.15 Déterminer le dernier chiffre, puis les deux derniers chiffres de l'écriture décimale du nombre $S = 0! + 1! + 2! + \ldots + 2013!$.

Exercice 1.16 Montrer que le produit des n premiers entiers pairs positifs est $2^n n!$. En déduire une formule pour le produit des n premiers entiers impairs positifs.

Exercice 1.17 ♣ Si a et b sont deux entiers naturels (c'est-à-dire positifs ou nuls), on dit que a divise b, et on note $a|b$, si, et seulement si, $\exists n \in \mathbb{Z},\ b = na$. On appelle cette relation la divisibilité.
a) Su le modèle du cours sur la relation $\leqslant$, montrer que la divisibilité des entiers naturels est une relation réflexive, transitive et antisymétrique, mais que ce n'est pas un ordre total.
b) * Préciser le plus petit et le plus grand élément de l'ensemble $\mathbb{N}$ pour cet ordre.

Exercice 1.18 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, on note $f^{(n)}$ sa dérivée n-ième. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on a $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ et $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$.

Exercice 1.19 On pose $a_0 = \frac{1}{4}$ et, pour $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right).$$

Exercice 1.20 Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ est un multiple de 9.

Exercice 1.21 Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels compris dans l'intervalle $[-1, 0]$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Plus difficile : dans quel(s) cas cette inégalité devient-elle une égalité ?

Exercice 1.22 ♣ * Soit $C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad C(n,0) = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^* \quad C(0,p) = 0 \\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad C(n,p) = C(n-1,p) + C(n-1,p-1) \end{cases}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $C(n,p) = \binom{n}{p}$.

Exercice 1.23 ♣♣
Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u_i$ et $w_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$.

a) Montrer que $\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}=0$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $i\in[\![1,n-1]\!]$.

b) * En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=u_n$.

Exercice 1.24 Développer les sommes et produits suivants

$$\sum_{k=3}^{9}(2k+1)\quad;\quad\sum_{i=1}^{3}(\sum_{j=1}^{3}(i+j))\quad;\quad\sum_{i=2}^{5}(\prod_{k=1}^{i-1}(k^2+1))\quad;\quad\sum_{n=7}^{2}(n^3-2n+8).$$

Exercice 1.25 Soit $n\geqslant 0$ un entier fixé. Simplifier les expressions suivantes

$$\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^2-k^2]\qquad;\qquad\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$$

1.4 Infimum, supremum

Pour la plupart des exercices suivants, il est conseillé de faire un dessin.

Exercice 1.26 Soient a et b deux réels tels que $0<b<a$. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leur supremum/infimum et préciser s'il s'agit d'un maximum/minimum :

$$A=\{a+nb\,;\ n\in\mathbb{N}\}\quad;\quad B=\{a+\frac{b}{n}\,;\ n\in\mathbb{N}^*\}\quad;\quad C=\{(-1)^n(a-\frac{b}{n})\,;\ n\in\mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 1.27 ♣ * Soit $D=\{xy\,;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ et } |x|+|y|<1\}$. Montrer que la partie D est majorée dans $\mathbb{R}$ et déterminer son supremum.

Exercice 1.28 Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $A\cup B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

b) Déterminer $\sup(A\cup B)$ en fonction de $\sup A$ et $\sup B$.

c) On suppose $A\cap B$ non vide. Montrer que c'est une partie majorée de $\mathbb{R}$. Que dire de $\sup(A\cap B)$?

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on peut noter :

$$A+B=\{a+b\,;a\in A\text{ et }b\in B\}\quad\textit{et}\quad A\cdot B=\{ab\,;a\in A\text{ et }b\in B\}.$$

Exercice 1.29 Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $A+B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

c) ♣ * Montrer par un exemple que $A\cdot B$ n'est pas nécessairement majorée. A quelle(s) condition(s), portant sur A et B, la partie $A\cdot B$ est-elle majorée ? A-t-on nécessairement $\sup(A\cdot B)=\sup A.\sup B$?

1.5 Partie entière

Exercice 1.30 * Soient a,b deux entiers relatifs avec $b>0$. Montrer qu'il existe un unique couple (q,r) d'entiers relatifs tels que $a=bq+r$ et $0\leqslant r\leqslant b-1$. On dit que q est le quotient, et r le reste, de la division euclidienne de a par b.

Exercice 1.31 Combien existe-t-il d'entiers naturel dont le quotient et le reste, dans la division euclidienne par 38, sont égaux ?

Exercice 1.32 * Démontrer que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$:

a) $\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor\leqslant\lfloor x+y\rfloor\leqslant\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+1$; **b)** $\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$.

Exercice 1.33 **a)** Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lfloor 2x\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor$.

b) Pour tout réel x et tout entier naturel n, donner une expression simple de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.
c) En déduire, que, pour n assez grand, on a $S_n = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 1.34 Soient a et b deux nombres réels tels que $b - a > 3$. Démontrer que l'intervalle $]a, b[$ contient au moins trois entiers distincts.

Exercice 1.35 Soit T un réel strictement positif fixé, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. On suppose que f est bornée sur l'intervalle $[0, T[$ (c'est-à-dire que la fonction restreinte $f_{|[0,T[}$ est bornée). Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.36 Montrer que le nombre réel $\log_{10} 2$ est irrationnel.

Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

2.1 Etudes de fonctions

Exercice 2.1 On considère la fonction g définie pour x réel par $g(x) = x^2 \sin \dfrac{2\pi}{x}$.
a) Préciser le domaine D de définition de la fonction g, et étudier sa parité.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $g(x) = 0$.
c) Montrer que, pour tout $x \in D$, $-x^2 \leqslant g(x) \leqslant x^2$, et préciser pour quelles valeurs de x l'une des inégalités devient une égalité. En déduire la limite de g à droite en 0.
d) Etudier la limite de g en $+\infty$, et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) \leqslant x$. On admet que la droite d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de g.
e) A l'aide des éléments, précédents, donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 2.2 Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$.
a) Représenter sur l'intervalle $[-3, 3]$ la fonction partie entière $E : x \mapsto \lfloor x \rfloor$.
b) Quels sont les points où la fonction f change de valeur ? Préciser sa limite en 0 et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sa valeur en $\frac{1}{n}$.
c) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 2.3 Sans calculatrice, comparer les deux réels e^π et π^e.

Exercice 2.4 ♣ On admet les valeurs approchées par défaut (à retenir) $e \approx 2,71$ et $\sqrt{2} \approx 1,414$.
a) Montrer que $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$.
b) * Affiner ce résultat en montrant que $\frac{2}{3} < \ln 2 < \frac{7}{10}$.

2.2 Résolution d'équations

Dans toutes les équations ou systèmes d'équations suivants, on cherche les solutions réelles. Il pourra parfois être utile de procéder à une étude de fonction(s) pour déterminer, par exemple, le nombre de solutions.

Exercice 2.5 $2\ln(x+1) + \ln(3x+5) + \ln 2 = \ln(6x+1) + \ln(x-2) + \ln(x+2)$.

Exercice 2.6 $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \quad ; \quad 5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$.

Exercice 2.7 $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3 \quad ; \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} = 12$.

Exercice 2.8 $2\cos(2x) + 4\cos x + 3 = 0$.

Exercice 2.9 $\arctan \frac{x}{2} + \arctan x + \arctan 2x = \frac{3\pi}{4} \quad ; \quad \arctan x + \arctan 3x + \arctan 9x = \frac{3\pi}{2}$.

Exercice 2.10 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 218 \\ x + y = 20 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 119 \\ x - y = 7 \end{cases}$.

Exercice 2.11 $\begin{cases} 3(\log_x y - \log_y x) = 8 \\ xy = 9 \end{cases}$.

Exercice 2.12 Donner une expression plus simple de l'ensemble

$$E = \{(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \mid \log_a c - \log_b c = \log_a c \log_b c\}.$$

2.3 Images et antécédents

Exercice 2.13 **a)** Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ est une bijection.
b) Qu'en est-il de l'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4$?

Exercice 2.14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Montrer que, si f est strictement croissante, alors elle est injective. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2.15 * L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2\lfloor x \rfloor - x$ est-elle bijective ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 2.16 ♣♣ Montrer que les deux applications suivantes, de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, sont bijectives :
a) $f : (p, q) \mapsto 2^p(2q + 1)$; **b)** $g : (p, q) \mapsto \frac{1}{2}(p + q)(p + q + 1) + p$.

Exercice 2.17 Tracer le graphe de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 - x^2$.
Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$, $f([-3, 2[)$, $f^{-1}([0, 6])$, $f^{-1}(f([0, \frac{1}{2}]))$, $f(f^{-1}([-1, 0[))$.

Exercice 2.18 ♣ Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction croissante surjective. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \leqslant n$.

Exercice 2.19 ♣ * Soit $f : E \to F$ une application.
a) Soit A une partie de E. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
c) Soit B une partie de F. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
b) Montrer que f est injective si, et seulement si : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$.
d) Montrer que f est surjective si, et seulement si : $\forall B \in \mathscr{P}(F),\ B = f(f^{-1}(B))$.

Exercice 2.20 ♣ Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
a) * Montrer que : $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.
b) Montrer que : $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.
c) Montrer que : $g \circ f$ bijective $\Rightarrow$ f injective et g surjective.
Donner un exemple où f est injective mais non surjective, g surjective mais non injective, et $g \circ f$ est bijective.

Exercice 2.21 ♣♣ * Soit E un ensemble, A et B deux parties de E, et $\Phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ définie par $\Phi(X) = (X \cap A, X \cap B)$.
a) Déterminer $\Phi(E)$ et $\Phi(A \cup B)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit injective.
b) De même, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit surjective.
c) A quelle condition Φ est-elle une bijection ? On précisera alors la bijection réciproque.

Exercice 2.22 **(Un résultat célèbre) ♣♣** *
Soit E un ensemble quelconque. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

Chapitre 3

Convergences des suites réelles

3.1 Etudes de limites

Etudier la convergence et la limite éventuelle des suites définies dans les exercices ci-dessous. Il n'est pas toujours nécessaire de faire beaucoup de calculs.

Exercice 3.1 $u_n = \dfrac{n+1}{n+\cos(n)}$; $v_n = \dfrac{\lfloor \ln n \rfloor}{\ln n}$; $w_n = \dfrac{n+1}{n} - \dfrac{n}{n-3}$; $x_n = \dfrac{1-n}{(-1)^n n \ln n}$.

Exercice 3.2 * $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$; a et b étant fixés dans $\mathbb{R}_{>0}$.

Exercice 3.3 * **a)** $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\theta}{2^k}$; **b)** $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos(k\theta)$; $\theta \in \mathbb{R}$ étant fixé.

Exercice 3.4 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
a) * Montrer que la suite u est convergente, et préciser sa limite.
b) Majorer la suite v à l'aide de la suite u, et en déduire qu'elle converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

Exercice 3.5 ♣ Soit u la suite réelle définie en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
a) Montrer que u est croissante et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.
b) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 3.6 ♣ Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin n$.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\cos(1)u_{n+1} - u_n$. En déduire que, si la suite u est convergente, alors sa limite est nécessairement nulle.
b) Montrer que la suite u n'admet pas 0 pour limite. Conclure.
c) Que dire, pour $\theta \in \mathbb{R}$ de la suite $(\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 3.7 (Moyenne arithmético-géométrique) ♣ Soient a et b deux réels strictement positifs, tels que $a < b$. On définit deux suites réelles u et v en posant :

$$u_0 = a,\ v_0 = b, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases} .$$

a) Montrer que $a < \sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a+b) < b$.
b) Montrer que les suites u et v admettent une limite commune ℓ, et que $a < \ell < b$.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique des réels a et b.

3.2 Suites définies par récurrence

Exprimer en fonction de n le terme général des suites définies ci-dessous. En déduire leurs limites éventuelles.

Exercice 3.8 $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 12 \end{cases}$; $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 2v_n - 2^n \end{cases}$.

Exercice 3.9 $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$; $\begin{cases} v_0 = 1 \ ; \ v_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+2} = 6v_{n+1} - 9v_n - 4 \end{cases}$.

Exercice 3.10 $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - e^{-n}) \end{cases}$; $\begin{cases} v_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = \frac{1}{2-v_n} \end{cases}$.
($a \in \mathbb{R}$ est fixé ; on précisera a *posteriori* pour quelles valeurs de a la suite est bien définie).

Exercice 3.11 $\begin{cases} z_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ z_{n+1} = \frac{1}{3}(2z_n - \bar{z}_n) \end{cases}$ ($a \in \mathbb{C}$ est fixé).

Exercice 3.12 ♣ * $\begin{cases} w_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ w_{n+1} = \frac{1}{2}(w_n + |w_n|) \end{cases}$ ($b \in \mathbb{C}$ est fixé).

3.3 Application du cours

Exercice 3.13 Déterminer deux suites divergentes u et v telles que :
a) la suite $u + v$ soit convergente ; **b)** la suite uv soit convergente.

Exercice 3.14 (vrai/faux) Soient u et v deux suites réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant v_n$. On suppose de plus que la suite v admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Pour chacune des assertions suivantes, dites si elle est nécessairement vrai, ou peut-être fausse (en justifiant votre réponse).
a) $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant \ell$.
b) La suite u est majorée.
c) La suite u est convergente.

Exercice 3.15 ♣ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante, et $v = \left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite.
a) On suppose que v admet une limite finie ℓ. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
b) On suppose que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 3.16 Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$. On suppose que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite ℓ, finie ou infinie.
a) On suppose $\ell \in [0, 1[$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
b) On suppose $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
c) On suppose $\ell = 1$. Montrer que tous les cas sont possibles : u convergente de limite nulle ou non, u divergente de première ou de seconde espèce. *

Exercice 3.17 ♣ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes et admettent la même limite ℓ. Montrer que la suite u est convergente, de limite ℓ.

Exercice 3.18 ♣ * Soit u une suite réelle non majorée. Montrer que u admet une suite extraite $\left(u_{\varphi(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$.

Chapitre 4

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

4.1 Limites et continuité en un point

Exercice 4.1 Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x$; **b)** $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x+1}{3x^2-2x-5}$; **c)** $\lim_{x\to4}\frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4}$; **d)** $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+3-x^2}-2}$.

Exercice 4.2 Soit $E:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\lfloor x\rfloor$.

a) Démontrer que la fonction E est continue à droite en tout point.

b) Quels sont les points où la fonction E n'est pas continue ? *(On demande une réponse justifiée.)*

Exercice 4.3 ♣ On considère la fonction $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}{x^x}$.

a) Cette fonction admet-elle une limite en $+\infty$?

b) Donner l'allure du graphe de la fonction f.

Exercice 4.4 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique et admettant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 4.5 ♣ Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ et $g:]0,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{f(x)}{x}$. On supppose f croissante et g décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 4.6 ♣ Soient $a<b$ deux réels et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction croissante.

a) Rappeler pourquoi la fonction f admet une limite à droite en tout $x\in[a,b[$, que l'on notera $f_d(x)$, et une limite à gauche en tout $x\in]a,b]$, que l'on notera $f_g(x)$. Pour tout $x\in]a,b[$, on notera $v_f(x)=f_d(x)-f_g(x)$.

b) Soit $x\in]a,b[$. Montrer que $v_f(x)\geqslant0$, et que $v_f(x)=0$ si, et seulement si, f est continue en x.

c) Soit $(x,y)\in[a,b]^2$ tel que $x<y$. Montrer que $f_g(y)-f_d(x)\geqslant0$, et que $f_g(y)-f_d(x)=0$ si, et seulement si, f est constante sur $]x,y[$.

d) * Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et $x_1<\ldots<x_p$ des éléments de $]a,b[$. Montrer que $\sum_{k=1}^{p}v_f(x_k)\leqslant f(b)-f(a)$.

e) En déduire que, pour tout $\alpha>0$, l'ensemble des $x\in]a,b[$ tels que $v_f(x)>\alpha$ est fini.

Ceci implique que l'ensemble des points où la fonction f n'est pas continue est un ensemble dénombrable.

4.2 Suites définies par récurrence

Dans les exercices suivants, un réel a est fixé. On étudiera la bonne définition et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des outils développés en cours.

Exercice 4.7 $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$.

Exercice 4.8 $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\ln(1+u_n)$.

Exercice 4.9 $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+\sin u_n$.

Exercice 4.10 ♣ * $u_0=a$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2u_n-u_n^3$.

4.3 Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 4.11 Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c)$.

Exercice 4.12 Entre 8 h et 9 h, un marcheur parcourt 12 km.
a) Démontrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 6 km.
b) Existe-t-il un intervalle de 20 min pendant lequel il parcourt exactement 4 km ?
c) Existe-t-il un intervalle de 40 min pendant lequel il parcourt exactement 8 km ?

Exercice 4.13 ♡ Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet au moins un point fixe sur le segment $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 4.14 Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet au moins un point fixe sur le segment $[a, b]$.

Exercice 4.15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4.16 Soient $a < b$ deux réels, et f, g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $\forall x \in [a, b],\ 0 < f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe un réel $k < 1$ tel que $\forall x \in [a, b],\ f(x) < kg(x)$.

Exercice 4.17 ♣ * Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement positives. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n} f(x_n)$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 4.18 ♣♣ Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue telle que $f \circ f = Id_{[0,1]}$ et $f(0) = 0$.
a) Démontrer que f est injective.
b) * Démontrer que f est strictement croissante.
c) Démontrer que f est l'application identité de $[0, 1]$.

4.4 Equations fonctionnelles

Exercice 4.19 ♣ On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et vérifiant l'équation fonctionnelle : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.
a) Soit $f \in E$ provisoirement fixée. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.
b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.
c) Montrer alors qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.
d) Achever de déterminer l'ensemble E.

Exercice 4.20 ♣ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle précédente.
a) * On suppose f continue en 0. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
b) On suppose f croissante. Montrer que f appartient à l'ensemble E.

Exercice 4.21 ♣ Dans cet exercice, on s'intéresse aux applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle $(\mathscr{E})$: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y)$.
a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant l'équation fonctionnelle $(\mathscr{E})$.

(i) Déterminer la valeur de $f(0)$.

(ii) Etudier la parité de f.

(iii) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, montrer que $f(nx) = n^2 f(x)$.

(iv) Pour $x \in \mathbb{Q}$, déterminer la valeur de $f(x)$.

b) Déterminer les solutions de $(\mathscr{E})$ continues sur $\mathbb{R}_+$.
c) Déterminer les solutions de $(\mathscr{E})$ croissantes sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4.22 ♣ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que :
$$\forall (x, y,) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\tfrac{x+y}{2}) = \tfrac{1}{2}(f(x) + f(y)) \quad (\star).$$
On suppose de plus que $f(0) = f(1) = 0$.
a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = 0$.
b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $f(\frac{n}{2^k}) = 0$.
c) En déduire que f est l'application nulle.
d) Déterminer plus généralement l'ensemble des fonctions f vérifiant l'équation $(\star)$.

Indications

Chapitre 1

1.7 : On pourra s'aider d'un dessin (qui ne remplace pas pour autant la démonstration). On démontrera séparément les deux implications.

1.11 : d) Calculer $f(x)$ et $f(-x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, et en déduire $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.

1.13 : On pourra raisonner par réurrence sur l'entier n, pour un entier p fixé.

1.17 : On commencera par écrire, en quantificateurs, la proposition «a est le plus petit (resp. plus grand) élément de $\mathbb{N}$ pour la relation $|$ ».

1.22 : On démontrera par récurrence sur n la proposition : $\forall p \in \mathbb{N},\ C(n,p) = \binom{n}{p}$.

1.23 : On pourra écrire w_n en fonction des u_i puis intervertir les sommations.

1.27 : On pourra étudier sur $[0,1]$ la fonction $t \mapsto t(1-t)$. On utilisera la caractérisation du supremum.

1.29 : La condition recherchée est que A ou B soit contenue dans $\mathbb{R}^+$, ou qu'elle soient toutes deux minorées en plus d'être majorées. Reste à prouver qu'elle est suffisante et surtout nécessaire...

1.30 : On pourra utiliser la partie entière du réel $\frac{b}{a}$.

1.32 : On pourra utiliser la définition ou la caractérisation de la partie entière.

Chapitre 2

2.4 : On pourra comparer les réel e et $2\sqrt{2}$, et utiliser (là où il est valable) l'encadrement $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.

2.15 : Vous n'arriverez à rien sans tracer le graphe de la fonction f...

2.19 : Pour les questions **a)** et **b)** , et pour les implications de gauche à droite dans les questions **c)** et **d)** , il faut (et il suffit de) revenir aux définitions de l'image directe et de l'image réciproque.

2.20 : On pourra envisager deux raisonnement : l'un direct, et l'autre démontrant la contraposée.

2.21 : a) La condition est $A \cup B = E$. **b)** La condition est $A \cap B = \varnothing$. Etant données des parties Y et Z de A et B, on pourra rechercher un antécédent du couple (Y,Z).

2.22 : Pour une application $\varphi : E \to \mathscr{P}(E)$, on pourra montrer que la partie $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$ n'a pas d'antécédent par φ.

Chapitre 3

3.2 : a) On discutera bien sûr suivant les valeurs relatives de a et b.

3.3 : a) On montrera que la suite v définie par $v_n = u_n \sin\frac{\theta}{2^n}$ est une suite géométrique. **b)** Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, on montrera que $v_n \to 0$, en montrant que $|\cos(n\theta)| \not\to 1$.

3.4 : On pourra reconnaître une somme télescopique.

3.12 : On pourra montrer que, si $b \notin \mathbb{R}^-$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \notin \mathbb{R}^-$, et écrire dans ce cas w_n sous forme trigonométrique.

3.16 : Pour ce dernier exemple, plus difficile, on pourra étudier la suite définie par : $u_n = 2 + \sin(\sqrt{n})$, en utilisant l'identité $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ pour prouver que $u_{n+1} - u_n \to 0$.

3.18 : On pourra montrer que $\forall M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geqslant n, u_p \geqslant M$, puis construire par récurrence les entiers $\varphi(k),\ k \in \mathbb{N}$.

Chapitre 4

4.6 : On pourra montrer que $\sum_{k=1}^{p} v_f(x_k) + \sum_{k=1}^{p-1}(f_g(x_{k+1} - f_d(x_k)) = f_g(b) - f_d(a) \leqslant f(b) - f(a)$

4.10 : En notant $f(x) = 2x - x^3$, on aura intérêt à rechercher les points fixes de $f \circ f$.

4.17 : On raisonnera par l'absurde en supposant la suite bornée et en montrant qu'il existe alors $\alpha > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) \geqslant \alpha$.

4.18 : On utilisera le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que $f(0) = 0$.

4.20 : On pourra remarquer que, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - f(a) = f(x-a)$.