Examen-type 2

en vue de l'examen partiel du jeudi 2 mai 2013 (1h50)

Consigne. Aucun document, aucune calculatrice n'est autorisée. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants. Il est conseillé de lire les questions très précisément, car chaque mot est important.

Le total des points attribués aux questions est 110. Il est donc possible d'obtenir 100 % en laissant une question sans réponse.

Exercice 1 (30 points)

Répondre aux trois questions au verso de l'énoncé. Rendre ce feuillet à l'intérieur du cahier d'examen, sans oublier d'y inscrire son nom et son numéro d'étudiant(e).

Exercice 2 (20 points)

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soient a, b et c trois nombres réels. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ et $g(y) \xrightarrow[y \to b]{} c$.

a) Écrire, à l'aide de quantificateurs, la proposition « $g(y) \xrightarrow[y \to b]{} c$ ».

b) Montrer que $g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} c$.

Il s'agit ici de redémontrer le théorème de composition des limites, tel que vu en classe.

Exercice 3 (40 points)

a) Soient a et b deux réels strictement positifs, tels que $a < b$. Montrer que

$$a < \sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a+b) < b.$$

Indication : pour obtenir l'inégalité du milieu, on pourra partir de l'inégalité $(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 > 0$.

b) On définit deux suites réelles u et v en posant :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) \end{cases} .$$

À l'aide de la question a), montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2$$

c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

Indication : utiliser le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) À l'aide de l'égalité $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Exercice 4 (20 points)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + x$.

a) À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe un nombre réel a tel que $f(a) = 1$.

b) Montrer que la fonction f est strictement croissante. En déduire que, pour tout réel $x \neq a$, on a $f(x) \neq 1$.

Nom : **Numéro d'étudiant-e :**

1 - Énoncer le théorème de la bijection continue (on ne demande pas la démonstration).

2 - Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont toujours vraies, sans aucun contre-exemple possible ? Cocher la ou les bonnes réponses.

- ☐ **a)** La fonction f est bornée sur $[0,1[$.
- ☐ **b)** La fonction f est de signe constant sur $[0,1[$.
- ☐ **c)** L'image directe $f([0,1[)$ est un intervalle.
- ☐ **d)** L'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$ est vide.
- ☐ **e)** La fonction f n'admet pas de limite à gauche en 1.

3 - On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$, où $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle ou lesquelles sont vraies ? Cocher la ou les bonnes réponses.

- ☐ **a)** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est grossièrement divergente.
- ☐ **b)** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.
- ☐ **c)** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
- ☐ **d)** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente.
- ☐ **e)** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est à termes positifs.