Corrigé de l'examen - type 2 - MAT 1120

Exercice 1 (voir plus loin)

Exercice 2

a) "$g(y) \xrightarrow[y\to b]{} c$" signifie "$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall y\in\mathbb{R}, |y-b|\leq\delta \Rightarrow |f(y)-c|\leq\varepsilon$".

b) Soit $\varepsilon>0$ fixé. Comme $g(y)\xrightarrow[y\to b]{} c$, il existe un réel $\delta>0$ tel que:

$$\forall y\in\mathbb{R}, \quad |y-b|\leq\delta \Rightarrow |g(y)-c|\leq\varepsilon.$$

On a alors $\delta>0$. Comme $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$, il existe un réel $\gamma>0$ tel que:

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad |x-a|\leq\gamma \Rightarrow |f(x)-b|\leq\delta.$$

Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x-a|\leq\gamma$, on a $f(x)\in\mathbb{R}$ et $|f(x)-b|\leq\delta$, donc $|g(f(x))-c|\leq\varepsilon$. On a prouvé:

$$\forall\varepsilon>0, \quad \exists\gamma>0, \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad |x-a|\leq\gamma \Rightarrow |g\circ f(x)-c|\leq\varepsilon,$$

c'est-à-dire $g\circ f(x)\xrightarrow[x\to a]{} c$.

Exercice 3

a) Voir le corrigé de l'exercice 7.2.

b) idem

c) idem

d) Pour tout $n\geqslant 0$, $u_n = 2v_{n+1}-v_n$. On $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc $v_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$ (suite extraite). On en déduit $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ell-\ell=\ell$ (limites et opérations).

Exercice 4 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto x^3+x$.

a) La fonction f est polynomiale, donc continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$. On calcule $f(0)=0<1$, et $f(1)=2>1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)=1$.

b) Soient $x<y$ deux réels. Alors $x^3<y^3$ et $x<y$, donc $f(x)<f(y)$: la fonction f est strictement croissante (on aurait aussi pu calculer sa dérivée). En particulier, soit $x\neq a$ un réel. Si $x>a$, alors $f(x)>f(a)=1$. Si $x<a$, alors $f(x)<f(a)=1$. Dans tous les cas, on a $f(x)\neq 1$.

Nom : Corrigé **Numéro d'étudiant-e :**

1 - Énoncer le théorème de la bijection continue (on ne demande pas la démonstration).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors $J = f(I)$ est un intervalle, la restriction $f^{|J} : I \longrightarrow J$ est une bijection, et la fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue.

2 - Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont toujours vraies, sans aucun contre-exemple possible ? Cocher la ou les bonnes réponses.

- ☐ **a)** La fonction f est bornée sur $[0,1[$. contre-exemple : $f : x \longmapsto \frac{1}{1-x}$.
- ☒ **b)** La fonction f est de signe constant sur $[0,1[$. théorème des valeurs intermédiaire
- ☒ **c)** L'image directe $f([0,1[)$ est un intervalle. idem.
- ☒ **d)** L'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$ est vide. f ne s'annule pas.
- ☐ **e)** La fonction f n'admet pas de limite à gauche en 1. contre-exemple : $f : x \longmapsto 3$.

3 - On considère la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$, où $u_n = \frac{2^n}{n!}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle ou lesquelles sont vraies ? Cocher la ou les bonnes réponses.

- ☐ **a)** La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est grossièrement divergente.
- ☐ **b)** La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est divergente.
- ☒ **c)** La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente.
- ☒ **d)** La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est absolument convergente.
- ☒ **e)** La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est à termes positifs. $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$.

critère de D'Alembert