Examen-type 1

en vue de l'examen partiel du jeudi 7 mars 2013 (1h50)

Consigne. Aucun document, aucune calculatrice n'est autorisée. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants.

Exercice 1 (20 points)

Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation des fonctions bijectives.

Exercice 2 (20 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

a) Prouver par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k$.

b) À l'aide de la question a), exprimer u_n directement en fonction de n (sans symbole de sommation).
Il est conseillé de vérifier sa réponse en calculant les premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 3 (30 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}$.

a) Préciser le domaine D de définition de la fonction f.

b) La fonction f est-elle paire ? Est-elle impaire ? Est-elle périodique ? Pour cette question, on accepte des réponses sans justification.

c) Montrer que, pour tout $x \in D$, on a $f(x) \geqslant x$.

d) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) = x$?

e) Dessiner la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-2, 1]$, à l'échelle 1 unité = 5 cm.
Indication : calculer $f(x)$ pour $\frac{1}{2} < x < 1$, pour $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$, etc. Préciser ce qui se passe aux points «frontières». Faire de même pour les valeurs négatives de x.

Exercice 4 (30 points)

Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.

a) Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition logique «la suite u est convergente».

b) On dit que la suite u est stationnaire si elle devient constante à partir d'un certain rang n_0. Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition logique «la suite u est stationnaire».

c) Montrer l'implication

$$u \text{ est stationnaire} \quad \Longrightarrow \quad u \text{ est convergente.}$$

d) Donner un exemple de suite convergente qui n'est pas stationnaire.