Corrigé de l'examen-type n°1 - MAT 1120

Exercice 2

$u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} = 3u_n + 1$.

a) (I) Par hypothèse, $u_0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} 3^k$.

(H) Soit $n \geq 0$ un entier fixé. Supposons $u_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k$.

Alors
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 1 \\ &= 3 \cdot \sum_{k=0}^{n} 3^k + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} 3^{k+1} + 1 \\ &= \sum_{p=1}^{n+1} 3^p + 1 \quad \text{(changement d'indice } p=k+1) \\ &= \sum_{p=0}^{n+1} 3^p \quad (\text{car } 3^0 = 1). \end{aligned}$$

Ainsi $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 3^k$, et l'hérédité est prouvée.

(C) D'après le théorème de la récurrence, on conclut :
$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} 3^k.$$

b) D'après la formule de sommation d'une progression géométrique,
$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Exercice 3

a) On pose $f(x) = \dfrac{1}{\lfloor 1/x \rfloor}$. Ceci a un sens si $x \neq 0$ et $\lfloor 1/x \rfloor \neq 0$.

Or, pour $x \neq 0$,
$$\lfloor 1/x \rfloor = 0 \iff 0 \leq \frac{1}{x} < 1 \iff x > 1.$$

Ainsi f est définie sur le domaine $D =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$.

b) Le domaine de définition de f n'est ni périodique, ni symétrique par rapport à 0. Donc f n'est ni périodique, ni paire, ni impaire.

c) Pour tout $x \in D$, on a $\lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$.

Comme $\lfloor 1/x \rfloor$ et $1/x$ sont non nuls et de même signe, on en déduit

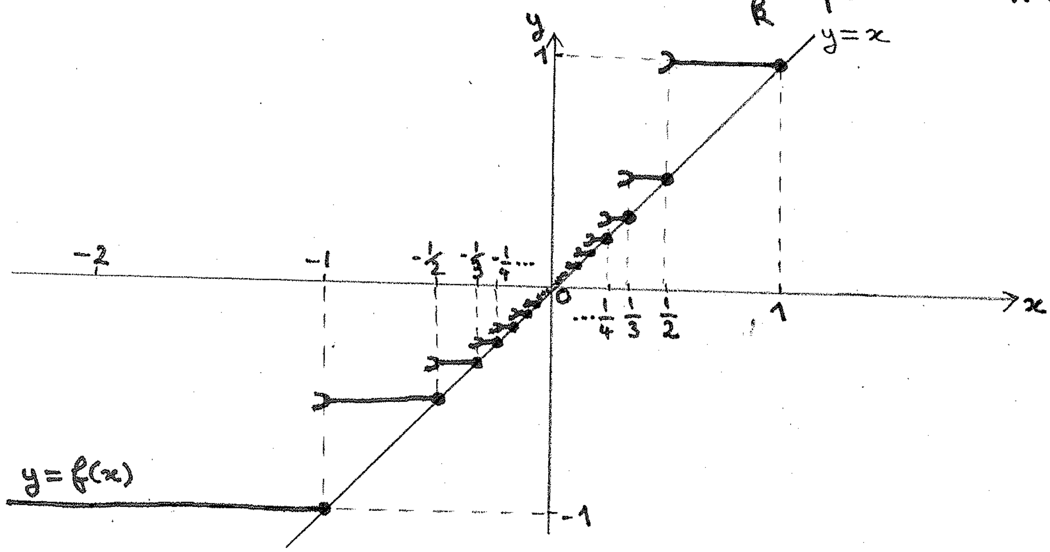
$$f(x) = \frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor} \geq x.$$

d) Pour $x \in D$, $\quad f(x) = x \iff \lfloor 1/x \rfloor = 1/x$

$\iff 1/x \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{1}{k}$ pour un k entier non nul.

e)



Exercice 4

a) u est convergente : $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \geq 0, \forall n \geq n_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

b) u est stationnaire : $\exists a \in \mathbb{R}, \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, u_n = a$.

c) Supposons u stationnaire. Il existe un réel a et un entier positif n_0 tels que $\forall n \geq n_0, u_n = a$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. En posant $n_1 = n_0$, on a :

$$\forall n \geq n_1, \quad |u_n - a| = 0 \leq \varepsilon.$$

Donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, et u est une suite convergente.

d) Notons $v = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$. D'après le cours, on a $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Mais la suite v est strictement décroissante, donc elle n'est pas stationnaire.