Examen final

Jeudi 2 mai 2013, 10h30-12h20

Consigne. Aucun document, aucune calculatrice n'est autorisée. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants. Il est conseillé de lire les questions très précisément, car chaque mot est important.

Le total des points attribués aux questions est 110. Il est donc possible d'obtenir 100 % en laissant une question sans réponse.

Exercice 1 (30 points)

Répondre aux trois questions au verso de l'énoncé. Rendre ce feuillet à l'intérieur du cahier d'examen, sans oublier d'y inscrire son nom et son numéro d'étudiant(e).

Exercice 2 (20 points)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. On note ℓ sa limite.

a) Écrire, à l'aide de quantificateurs, la proposition « $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ».

b) Écrire, à l'aide de quantificateurs, la proposition « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ».

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Il s'agit ici de redémontrer un théorème vu en classe.

Exercice 3 (40 points)

Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$.

a) Montrer que, pour tout $x \in [1,2]$, on a $f(x) \in [1,2]$.

b) Montrer que, pour tout $x \in [1,2]$, on a $0 \leqslant f(x) - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2}(x-\sqrt{2})^2$.

Indication : calculer $f(x) - \sqrt{2}$ en réduisant au même dénominateur.

c) On étudie maintenant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

À l'aide des deux questions précédentes, montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \in [1,2] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2^{2^n-1}}.$$

d) En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}$.

Exercice 4 (20 points)

Soit g la fonction définie par $g(x) = x - 2\sqrt{4-x^2}$.

a) Déterminer le domaine de définition D de la fonction g.

b) À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe un nombre réel $x \in D$ tel que

$$g(x) = -3.$$

Nom : **Numéro d'étudiant-e :**

1 - Énoncer le théorème de comparaison pour les séries (on ne demande pas la démonstration).

2 - Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont toujours vraies, sans aucun contre-exemple possible ? Cocher la ou les bonnes réponses. *On conseille de bien lire l'énoncé avant de répondre.*

- ☐ **a)** La fonction f est bornée sur $[0,1]$.
- ☐ **b)** La fonction f est de signe constant sur $[0,1]$.
- ☐ **c)** L'image directe $f([0,1])$ est un intervalle.
- ☐ **d)** L'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$ est vide.
- ☐ **e)** La fonction f n'admet pas de limite à gauche en 1.

3 - On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, où $u_n = \dfrac{\sin(n)}{2^n}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle ou lesquelles sont vraies ? Cocher la ou les bonnes réponses.

- ☐ **a)** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est grossièrement divergente.
- ☐ **b)** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est divergente.
- ☐ **c)** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
- ☐ **d)** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente.
- ☐ **e)** La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est à termes positifs.