Corrigé de l'examen final du 2 mai 2013 - MAT 1120

Exercice 1 (voir plus bas)

Exercice 2

a) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

b) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

c) On suppose $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Posons $\varepsilon = 1$. Il existe alors un entier $n \geq n_1$ tel que : $\forall n \geq n_1, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq n_1$, l'inégalité triangulaire entraîne :

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq \varepsilon + |\ell|.$$

L'ensemble $\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_1-1}|\}$ est fini. Il admet donc un maximum.

Notons $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{n_1-1}|, \varepsilon + |\ell|\}$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, * si $n \leq n_1 - 1$, alors $|u_n| \leq M$ car $|u_n| \in \{|u_0|, \dots, |u_{n_1-1}|\}$;

* si $n \geq n_1$, alors $|u_n| \leq \varepsilon + |\ell| \leq M$.

On obtient $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$: la suite $(u_n)_{n \geq n_1}$ est bornée.

Exercice 3

a) Soit $x \in [1,2]$. Alors $1 \leq x \leq 2$, donc $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 1$, et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1$.

En sommant ces inégalités, on trouve $1 \leq f(x) \leq 2$, soit $f(x) \in [1,2]$.

b) Soit $x \in [1,2]$. Alors $f(x) - \sqrt{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \sqrt{2} = \frac{x^2 + 2 - 2x\sqrt{2}}{2x} = \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2x}$.

Or $2 \leq 2x \leq 4$ donc $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2}$. Comme $(x - \sqrt{2})^2 \geq 0$, on obtient :

$$0 \leq f(x) - \sqrt{2} \leq \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2}.$$

c) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $u_n \in [1,2]$ et $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^{2^n - 1}}$ »

(I) Par définition, $u_0 = 2 \in [1,2]$ et $u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \in [0,1]$, où $1 = \frac{1}{2^{2^0 - 1}}$.

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors $u_n \in [1,2]$ donc, d'après la question a), $u_{n+1} = f(u_n) \in [1,2]$.

De plus, on a $0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2^{2^n-1}}$ donc $0 \leqslant (u_n - \sqrt{2})^2 \leqslant \frac{1}{(2^{2^n-1})^2} = \frac{1}{2^{2^{n+1}-2}}$.

D'après la question b), on en déduit $0 \leqslant f(u_n) - \sqrt{2} \leqslant \frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2}$,

c'est-à-dire $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2 \times 2^{2^{n+1}-2}} = \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}$.

La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est prouvée.

(c) Il résulte du théorème de la récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2^{2^n-1}}$. Or $2^n - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, et $2^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Par composition de limites, $2^{2^n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, donc $\frac{1}{2^{2^n-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit $u_n - \sqrt{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, c'est-à-dire $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{2}$.

Exercice 4

a) On pose $g(x) = x - 2\sqrt{4-x^2}$. Ceci est bien défini si $4 - x^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire pour $x \in [-2,2]$. On a donc $D = [-2,2]$.

b) La fonction $x \longmapsto 4 - x^2$ est polynomiale, donc continue sur $[-2,2]$. Elle est de plus à valeurs dans $[0,+\infty[$, et la fonction $y \longmapsto \sqrt{y}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Par composition, la fonction $x \longmapsto \sqrt{4-x^2}$ est donc continue sur $[-2,2]$. La fonction g, différence de deux fonctions continues, est donc continue sur l'intervalle $[-2,2]$.

De plus, $g(-2) = -2 > -3$, et $g(0) = -4 < -3$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [-2,2]$ tel que $g(x) = -3$.

Nom : **Numéro d'étudiant-e :**

1 - Énoncer le théorème de comparaison pour les séries (on ne demande pas la démonstration).

Soient $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que :

$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant v_n$.

→ Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge aussi.

→ Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ diverge aussi.

2 - Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont toujours vraies, sans aucun contre-exemple possible ? Cocher la ou les bonnes réponses. *On conseille de bien lire l'énoncé avant de répondre.*

- ☒ **a)** La fonction f est bornée sur $[0, 1]$.
- ☒ **b)** La fonction f est de signe constant sur $[0, 1]$.
- ☒ **c)** L'image directe $f([0, 1])$ est un intervalle.
- ☒ **d)** L'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$ est vide.
- ☐ **e)** La fonction f n'admet pas de limite à gauche en 1.

3 - On considère la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, où $u_n = \dfrac{\sin(n)}{2^n}$. Parmi les propositions suivantes, laquelle ou lesquelles sont vraies ? Cocher la ou les bonnes réponses.

- ☐ **a)** La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est grossièrement divergente.
- ☐ **b)** La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est divergente.
- ☒ **c)** La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente.
- ☒ **d)** La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est absolument convergente.
- ☐ **e)** La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est à termes positifs.