Examen partiel

Jeudi 7 mars 2013, 10h30-12h20

Consigne. Aucun document, aucune calculatrice n'est autorisée. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants. Il est conseillé de lire les questions très précisément, car chaque mot est important.

Le total des points attribués aux questions est 110. Il est donc possible d'obtenir 100 % sans traiter, par exemple, la question **3 e)**.

Exercice 1 [20 points]

Énoncer et démontrer le théorème des gendarmes (pour une limite finie).

Exercice 2 [20 points]

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $a_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$.

a) Soit $n \in \mathbb{Z}$ un entier. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que l'entier $(n+3)^3 - n^3$ est un multiple de 9.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'entier a_n est un multiple de 9.

Exercice 3 [50 points]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 3\lceil x \rceil - 2x$.

a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant f(x) < x + 3$.

b) Dessiner le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2, 4]$, à l'échelle 1 unité = 1,5 cm.
On pourra calculer $f(x)$ pour $x \in]0, 1[$, puis $x \in]1, 2[$ etc. On n'oubliera pas les valeurs entières de x.

c) Sans justifier votre réponse, donner l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = \pi$. On rappelle la valeur approchée $\pi \approx 3,14$.

d) Sans justifier votre réponse, écrire sous forme de réunions d'intervalles les ensembles

$$f([0,2]) \qquad ; \qquad f^{-1}([0,2]) \qquad ; \qquad f^{-1}(f([0,2])).$$

e) Justifier précisément votre réponse à la question **c)**.

Exercice 4 [20 points]

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{n-1}{2n}$.

a) Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition logique « $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ ».

b) Démontrer la proposition logique de la question **a)**. Pour cette question, on demande d'utiliser uniquement la définition de la limite.