Corrigé de l'examen partiel du 7 mars 2013 - MAT 1120

Exercice 2

$\forall n \geq 0, \quad a_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3.$

a) Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $(n+3)^3 - n^3 = (n^3 + 9n^2 + 27n + 27) - n^3$

$$= 9(n^2 + 3n + 3).$$

Comme n est un entier, $n^2 + 3n + 3$ est un entier donc $(n+3)^3 - n^3$ est un multiple de 9.

b) (I) $a_0 = 0^3 + 1^3 + 2^3 = 9$ est un multiple de 9.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que a_n est un multiple de 9.

Alors $a_{n+1} = (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$

$$= a_n + (n+3)^3 - n^3.$$

Comme a_n et $(n+3)^3 - n^3$ sont des multiples de 9, on conclut que a_{n+1} est un multiple de 9.

(C) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de la récurrence, a_n est un multiple de 9.

Exercice 4

a) $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$ signifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \geq 1, \forall n \geq n_1, \ |u_n - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon.$

b) Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Notons $n_1 = \lceil 1/2\varepsilon \rceil$. Comme $\frac{1}{2\varepsilon} > 0$, n_1 est un entier et $n_1 \geq 1$. De plus, pour tout entier $n \geq n_1$, on a :

$$n \geq \frac{1}{2\varepsilon} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{2n} \leq \varepsilon.$$

Or $|u_n - \frac{1}{2}| = \left|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n}$. Donc $|u_n - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon$.

On a donc prouvé $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$.

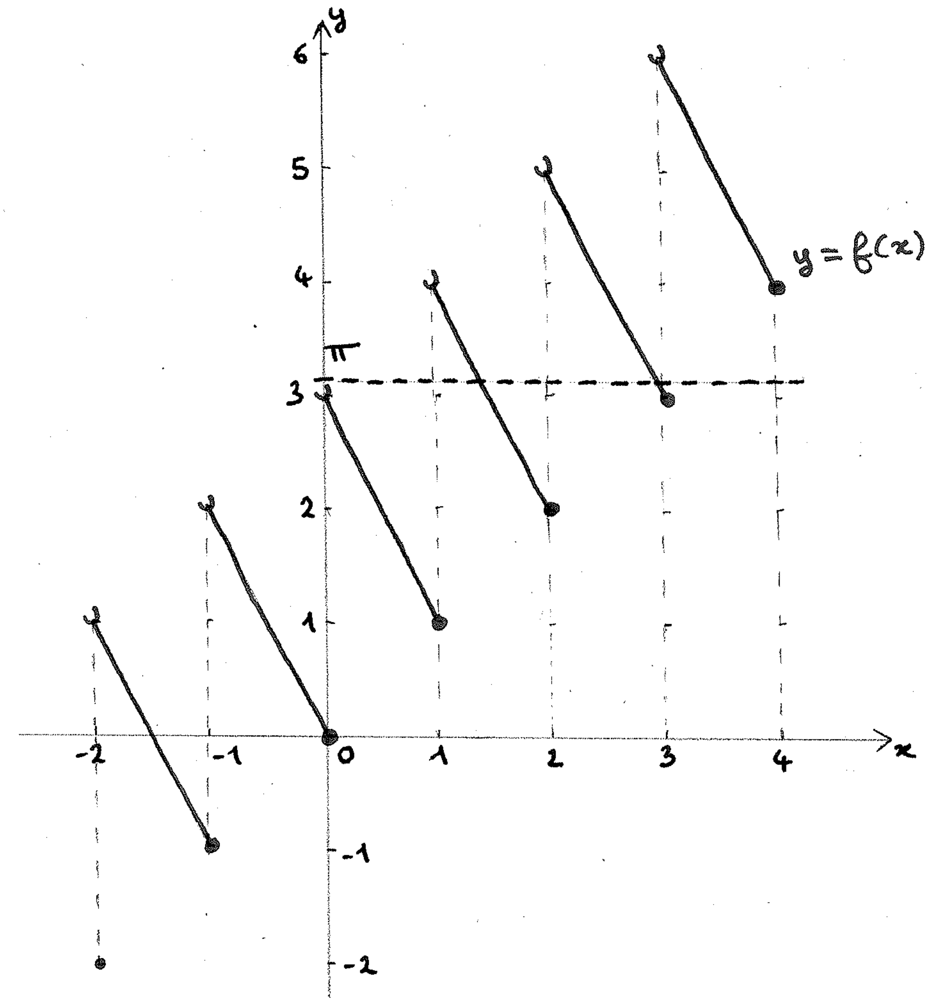
Exercice 3

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3\lceil x \rceil - 2x$

a) Pour tout réel x, on a $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$, donc $x \leq \lceil x \rceil < x+1$.

On en déduit $3x \leq 3\lceil x \rceil < 3x+3$, puis $x \leq f(x) < x+3$.

b)



c) $f(x) = \pi \iff x = \frac{6-\pi}{2} \approx 1{,}43$ ou $x = \frac{9-\pi}{2} \approx 2{,}93$

d) $f([0,2]) = \{0\} \cup [1,4[$ $\qquad f^{-1}([0,2]) =]-2,-\frac{3}{2}] \cup]-1,0] \cup [\frac{1}{2},1] \cup \{2\}$

$f^{-1}(f([0,2])) = \{-\frac{3}{2}\} \cup]-1,-\frac{1}{2}] \cup [0,2] \cup]\frac{5}{2},3]$.

e) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \pi$. Alors $x \leq \pi \leq x+3$, donc $\pi - 3 < x \leq \pi$. En particulier, $x \in]0,4[$. Si x est entier, alors $f(x)$ aussi, donc ce n'est pas possible. Si $x \in]0,1[$, alors $f(x) = 3-2x < 3$: ce n'est pas possible. Si $x \in]3,4[$, alors $f(x) = 12-2x \geq 12-8 = 4$: ce n'est pas possible. Si $x \in]1,2[$, alors $f(x) = 6-2x = \pi$ donc $x = \frac{6-\pi}{2}$. Si $x \in]2,3[$, alors $f(x) = 9-2x = \pi$ donc $x = \frac{9-\pi}{2}$. On vérifie que ces solutions sont dans les bons intervalles. On a prouvé qu'il n'y en a pas d'autre.