

# Devoir maison n°4

à rendre le jeudi 18 avril à 10h30

**Consigne.** Les devoirs maison doivent être rédigés individuellement, à la main, sur du papier au format lettre. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants. Il est conseillé d'écrire un brouillon avant de rédiger la version finale du devoir.

N'hésitez pas à commencer ce devoir assez tôt. Vous pourrez me demander des précisions ou des indications jusqu'au début du cours du mardi 16 avril.

—

On considère la fonction  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}{x^x}.$$

**1** - Soit  $n \geq 1$  un entier.

**a)** Donner une expression plus explicite de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[n, n+1[$ . En déduire que la fonction  $f$  est continue et décroissante sur cet intervalle.

**b)** Calculer la limite à gauche  $\ell_n$  de la fonction  $f$  au point  $n+1$ . La fonction  $f$  est-elle continue à gauche en ce point ?

**c)** Montrer que  $\ell_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

*Indication : utiliser une majoration de  $\ell_n$  et le théorème des gendarmes.*

**2** - Donner l'allure du graphe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1, 7]$ , à l'échelle 1 unité = 2 cm.

**3 - a)** Soit  $n \geq 1$  un entier. Montrer qu'il existe un réel  $x_n \in ]n, n+1[$  tel que  $f(x_n) = 1/2$ .

*Indication : utiliser les questions 1 a) et b), ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires.*

**b)** Montrer que la fonction  $f$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ .