Corrigé du devoir maison n° 4 - MAT 1120

$$f : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}{x^x} \end{array}$$

1 - a) Pour un entier $n \geq 1$ fixé, et pour tout $x \in [n, n+1[$,

$$f(x) = \frac{n^n}{x^x} = \frac{n^n}{e^{x \ln x}} = n^n e^{-x \ln x}$$

Pour $x < y$ dans $[n, n+1[$, on a $0 < x < y$ et $0 \leq \ln x < \ln y$, donc $x \ln x < y \ln y$. Par croissance de l'exponentielle, on en déduit $e^{-x\ln x} > e^{-y \ln y}$, donc $f(x) > f(y)$. Ainsi f est strictement décroissante sur $[n, n+1[$.

Par produit et composition de fonctions continues, on sait que la restriction $f|_{[n,n+1[}$ est continue, ce qui signifie que f est continue sur $]n, n+1[$, et continue à droite en n.

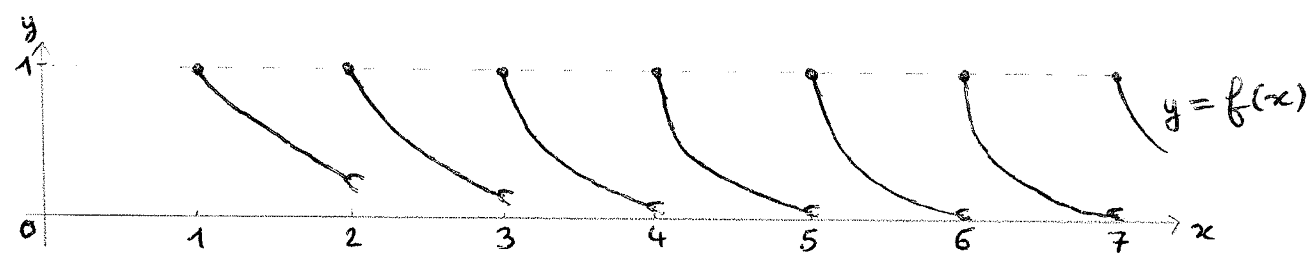
b) Par continuité des fonctions exponentielle et logarithme, on a $-x \ln x \xrightarrow[\substack{x \to n+1 \\ x < n+1}]{} -(n+1)\ln(n+1)$, puis $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to n+1 \\ x < n+1}]{} n^n e^{-(n+1)\ln(n+1)}$.

Ainsi $\ell_n = n^n e^{-(n+1)\ln(n+1)} = \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \neq 1 = f(n+1)$. Donc f n'est pas continue à gauche en $n+1$.

c) Pour tout $n \geq 1$, $\ell_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \times \dfrac{1}{n+1}$, d'où $0 \leq \ell_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

Or $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, donc $\ell_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, par le théorème des gendarmes.

2 -



3- a) Soit $n \geqslant 1$ fixé. La restriction $f|_{[n,n+1[}$ est continue sur l'intervalle $[n,n+1[$. On a $f(n) = 1 > \frac{1}{2}$, et $f(x) \xrightarrow[x<n+1]{x \to n+1} \ell_n$, avec $\ell_n < \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$. Par la version "améliorée" du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_n \in]n,n+1[$ tel que $f(x_n) = \frac{1}{2}$.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a $n \leqslant x_n \leqslant n+1$. Par le théorème des gendarmes, $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Supposons $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$. Alors $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, donc $\ell = \frac{1}{2}$.

Mais par ailleurs $n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, donc $f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Or $f(n) = 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, donc $\ell = 1$: contradiction.

Ainsi f n'a pas de limite en $+\infty$.