Devoir maison n°3

à rendre le mardi 2 avril à 13h30

Consigne. Les devoirs maison doivent être rédigés individuellement, à la main, sur du papier au format lettre. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants. Il est conseillé d'écrire un brouillon avant de rédiger la version finale du devoir.

1 - Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note

$$A_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k}.$$

Utiliser la formule de sommation d'une progression géométrique pour calculer A_n directement en fonction de n. En déduire que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, en précisant sa limite.

—

On fixe maintenant une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'on suppose décroissante et de limite nulle. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note

$$S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

2 - Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0.$$

3 - Pour tout entier $n \geqslant 0$, calculer la différence $S_{2n+2} - S_{2n}$, et déterminer son signe. En déduire que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

4 - De même, démontrer que la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

5 - Montrer que $S_{2n} - S_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

6 - À l'aide des trois questions précédentes, montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Bonus non évalué (mais corrigé si vous le souhaitez). On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| S_n - \ell \right| \;\leqslant\; u_n.$$

À retenir. Le résultat qui a été démontré dans ce devoir maison s'appelle le *critère spécial des séries alternées* ou *critère de Leibniz*. Il sera revu dans le chapitre 5 du cours.