Corrigé du devoir maison n°3 - MAT 1120

1 - Pour tout entier $n \geq 0$, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

On a affaire à la somme d'une progression géométique de raison $-\frac{1}{2}$, donc
$$A_n = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Or $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$, donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}$.

2 - La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et convergente. D'après le théorème sur les limites de suites décroissante, ceci implique
$$\inf\{u_n \,;\, n\geq 0\} = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$
En particulier, 0 minore l'ensemble $\{u_n \,;\, n \geq 0\}$, c'est-à-dire
$$\forall n \geq 0, \quad u_n \geq 0.$$

3 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0 \end{aligned}$$
car la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

Donc la suite $(S_{2n})_{n\geq 0}$ est décroissante.

4 - De même, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$, donc la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ est croissante.

5 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+1}$. Or $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $S_{2n} - S_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (suite extraite).

6 - On a montré que $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites adjacentes. D'après un théorème du cours, on en déduit que ces suites sont convergentes et de même limite l.

Un théorème du cours implique alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$,

donc $|S_{2n+1} - \ell| \leq |S_{2n+1} - S_{2n}| = u_{2n+1}$,

~~De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a~~

et $|S_{2n} - \ell| \leq |S_{2n} - S_{2n+1}| \leq u_{2n+1} \leq u_{2n}$.

En distinguant les cas n pair / n impair, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S_n - \ell| \leq u_n .$$