# Devoir maison n$^{o}$2

## à rendre le jeudi 21 février à 10h30

**Consigne.** Les devoirs maison doivent être rédigés individuellement, à la main, sur du papier au format lettre. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants. Il est conseillé d'écrire un brouillon avant de rédiger la version finale du devoir.

**1 -** Calculer la somme

$$A = \sum_{k=0}^{6} \left\lfloor \frac{19 + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor .$$

**2 -** Montrer que, pour tout nombre réel $a$, on a

$$\lfloor 2a \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor .$$

*Indication : on pourra distinguer selon que* $x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$ *ou* $x \geqslant \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$.

**3 -** Soit $x$ un nombre réel, et $n$ un entier naturel (c'est-à-dire positif ou nul). À l'aide de la question 2, donner une expression simple de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{x + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor .$$

*Indication : on prendra* $a = \dfrac{x}{2^{k+1}}$, *et on devrait reconnaître une somme «télescopique», comme dans l'exercice 1.25 du recueil.*

**4 -** Montrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \quad 2^n > n.$$

**5 -** Soit $x$ un nombre réel. À l'aide de la question 4, montrer que

$$\exists\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \quad 2^n > |x|.$$

**6 -** Soit $x$ un nombre réel. Déduire des questions précédentes que, pour un entier $n$ assez grand, on a

$$S_n = \lfloor x \rfloor .$$

Comparer avec le résultat de la question 1...

*Si on veut être précis, on pourra démontrer que la suite* $(S_n)_{n \geqslant 0}$ *est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang* $n_0$*) en la valeur* $\lfloor x \rfloor$. *Mais ce n'est pas exigé.*