Corrigé du devoir maison n°2 - MAT 1120

1- On calcule $A = \sum_{k=0}^{6} \left\lfloor \frac{19+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$

$$= \lfloor 10 \rfloor + \lfloor 21/4 \rfloor + \lfloor 23/8 \rfloor + \lfloor 27/16 \rfloor + \lfloor 35/32 \rfloor + \lfloor 51/64 \rfloor + \lfloor 83/128 \rfloor$$

$$= 10 + 5 + 2 + 1 + 1 + 0 + 0$$

$$= 19$$

2- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n = \lfloor a \rfloor$. On a $n \leq a < n+1$. Deux cas se présentent :

Cas 1 $n \leq a < n + \frac{1}{2}$. Alors $2n \leq 2a < 2n+1$ et $n + \frac{1}{2} \leq a + \frac{1}{2} < n+1$,

donc $\lfloor 2a \rfloor = 2n$ et $\lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor = n$.

Cas 2 $n + \frac{1}{2} \leq a < n+1$. Alors $2n+1 \leq 2a < 2n+2$ et $n+1 \leq a + \frac{1}{2} < n + \frac{3}{2}$,

donc $\lfloor 2a \rfloor = 2n+1$ et $\lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor = n+1$.

Dans les deux cas, on a bien $\lfloor 2a \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor a + \frac{1}{2} \rfloor$.

3- Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

Donc $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\lfloor x/2^k \rfloor - \lfloor x/2^{k+1} \rfloor \right)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \lfloor x/2^k \rfloor - \sum_{k=0}^{n} \lfloor x/2^{k+1} \rfloor$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \lfloor x/2^k \rfloor - \sum_{i=1}^{n+1} \lfloor x/2^i \rfloor \qquad \text{(changement d'indice } i = k+1\text{)}$$

$$= \lfloor x/2^0 \rfloor - \lfloor x/2^{n+1} \rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor - \lfloor x/2^{n+1} \rfloor .$$

4- Soit $P(n)$ la proposition « $2^n > n$ ».

La proposition $P(0)$ est vraie, car $2^0 = 1 > 0$.

Nous raisonnons par récurrence pour prouver $P(n)$ pour $n \geq 1$.

(I) $P(1)$ est vraie, car $2^1 = 2 > 1$.

(H) Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. Supposons $2^n > n$.

Alors, en multipliant par 2, on obtient $2^{n+1} > 2n$.

Comme $n \geqslant 1$, on a $2n = n + n \geqslant n+1$, donc $2^{n+1} > n+1$.

L'hérédité est prouvée.

(C) Par le théorème de la récurrence, on obtient $\forall n \geqslant 1,\ 2^n > n$.

Comme $2^0 > 0$, on a donc : $\forall n \geqslant 0,\ 2^n > n$.

5 - Soit $x \in \mathbb{R}$, et $n = \lfloor |x| \rfloor + 1$. Alors n est un entier positif, car $|x| \geqslant 0$, donc $2^n > n$. De plus, on a $|x| < n$. Donc $2^n > |x|$.

6 - En posant $n_0 = \lfloor |x| \rfloor + 1$, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on a $2^n > |x|$.

Donc
$$-2^n \leqslant x \leqslant 2^n$$
$$-\frac{1}{2} < \frac{x}{2^{n+1}} < \frac{1}{2}$$

et
$$\left\lfloor x/2^{n+1} \right\rfloor = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$, on obtient
$$S_n = \left| \begin{array}{ll} \lfloor x \rfloor & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .$$

(Il y avait donc une petite erreur dans l'énoncé.)