Devoir maison n°1

à rendre le mardi 5 février à 13h30

Consigne. Les devoirs maison doivent être rédigés individuellement, à la main, sur du papier au format lettre. Pour l'évaluation, la qualité de la présentation et la clarté des explications seront des critères importants. Il est conseillé d'écrire un brouillon avant de rédiger la version finale du devoir.

Si d et n sont deux entiers positifs ou nuls, on note

$$S_d(n) = \sum_{k=0}^{n} k^d = 0^d + 1^d + 2^d + \ldots + n^d.$$

1 - Sans démonstration, déterminer la valeur de $S_d(0)$ pour tout $d \in \mathbb{N}$. *Attention, il y a un piège...*

2 - Sans démonstration, déterminer les valeurs de $S_0(n)$ et $S_1(n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3 - Démontrer par récurrence sur l'entier n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_3(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

4 - Dans cette question, on cherche à exprimer la somme $S_4(n)$ en fonction de l'entier n, sans utiliser la récurrence. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$, et on considère la somme

$$T_5(n) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^5.$$

a) Montrer que $T_5(n) = S_5(m)$ pour un certain entier m. En déduire une expression simple de la différence $T_5(n) - S_5(n)$.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, écrire la somme $T_5(n)$ sous la forme

$$T_5(n) = aS_0(n) + bS_1(n) + \cdots + fS_5(n),$$

pour des entiers $a, b, \ldots, f$ à déterminer. En déduire une deuxième expression (un peu moins simple) de la différence $T_5(n) - S_5(n)$.

c) En égalisant les expressions obtenues aux sous-questions a) et b), obtenir une expression de $S_4(n)$ en fonction de $(n+1)^5$ et de $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$.

d) En utilisant les résultats des questions 2 et 3, et en simplifiant au maximum, vous pouvez alors obtenir une expression de $S_4(n)$ directement en fonction de n. Si vos calculs sont justes, vous devez pouvoir mettre cette expression sous la forme

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(\;\cdots\;)}{\cdots},$$

où l'expression entre parenthèses est un polynôme de degré 3, et le dénominateur est un entier. Il vous est demandé de donner le résultat final sous cette forme, et de l'encadrer.
Pour vérifier la formule trouvée, on pourrait la tester pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Bonus non évalué (mais corrigé si vous le souhaitez). Utiliser la même méthode pour trouver une expression de la somme $S_5(n)$ en fonction de n.