# Corrigé du devoir maison n°1 - MAT 1120

1- $\underline{\underline{S_0(0) = 0^0 = 1}}$ et, pour $d \geqslant 1$, $\underline{\underline{S_d(0) = 0^d = 0}}$.

2- $\underline{\underline{S_0(n) = n+1}}$ et $\underline{\underline{S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3- On note $P(n)$ la proposition « $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

(I) On a $S_2(0) = 0^2 = 0$, et $\frac{0(0+1)(2.0+1)}{6} = 0$.

Donc $P(0)$ est vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $P(n)$ vraie. Alors:

$$S_2(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 = S_d(n) + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + n + 6n + 6\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3) = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

(C) Par le théorème de la récurrence, il résulte que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4- a) Si on fait le changement d'indice $\ell = k+1$, on trouve

$$T_5(n) = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell^5 = S_5(n+1) \quad \text{car } 0^5 = 0.$$

Donc $T_5(n) - S_5(n) = S_5(n+1) - S_5(n) = (n+1)^5$.

b) D'après la formule du binôme de Newton, pour tout entier $k$ entre 0 et $n$, on a $(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$.

Donc $\quad T_5(n) = S_5(n) + 5\,S_4(n) + 10\,S_3(n) + 10\,S_2(n) + 5\,S_1(n) + S_0(n)$

On obtient $T_5(n) - S_5(n) = 5S_4(n) + 10\,S_3(n) + 10\,S_2(n) + 5\,S_1(n) + S_0(n)$.

c) On en déduit $S_4(n) = \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - 10\,S_3(n) - 10\,S_2(n) - 5\,S_1(n) - S_0(n)\right]$

d) On calcule :

$$S_4(n) = \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - (n+1)\right]$$

$$= \frac{\quad}{30}\Big[6(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 15(n^3 + n^2)$$

$$-10(2n^2 + n) - 15n - 6\Big]$$

$$= \frac{n(n+1)}{30}\left[6n^3 + 9n^2 + n - 1\right]$$

Donc $$\boxed{S_4(n) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}}.$$