Exercices de Mathématiques

Première partie

BCPST 1

Erwan Biland, Mathieu Gentès, Yassine Patel

Lycée Chateaubriand, classes de BCPST 1, 2015/2016

Table des matières

1 Introduction à la programmation en Python 3

2 Les bases du langage mathématique 6

3 Fonctions : propriétés générales 8

4 Fonctions : variations et limites 11

5 Boucles 14

6 Nombres entiers 16

7 Nombres complexes et trigonométrie 18

8 Listes 20

9 Systèmes linéaires 22

10 Dénombrement 24

11 Calcul de primitives et d'intégrales 27

12 Équations différentielles et suites récurrentes 28

13 Géométrie 30

14 Polynômes 33

15 Calcul matriciel 35

Chapitre 1

Introduction à la programmation en Python

Exercice 1.1 Installer Python 3 sur votre ordinateur personnel.

I - Prise en main

Les premiers exercices sont destinés à vous faire prendre en main les commandes et opérations de Python. Vous devrez savoir utiliser toutes les commandes et opérations qui apparaissent ici ; il est donc conseillé de les tester de manière approfondie, au delà des exemples suggérés, avant de passer à la suite. Retenez que toute nouvelle commande ou opération devrait être testée dans la console avant d'être utilisée «IRL» dans un programme.

Exercice 1.2 Entrer les instructions suivantes dans la console, et observer le ou les résultats renvoyés. Si le résultat est un message d'erreur, le traduire en français puis corriger l'erreur.

a)
```
> 3 + 25 * 2
> 23 / 4
> 23 // 4
> 23 % 4
> 2 ** 100
```

b)
```
> 2.6 - 3.3 * 2.0
> 23 / 4.0
> - 42.3 // 7.1
> 10 ** .5
```

c)
```
> "bon" + "jour"
> "J'en veux " + 3
> "Dis \"bonjour\"."
> "Ca marche " + pas
> "ha " * 3 + "!"
> "dom" * "mage"
```

d)
```
> 1 + 1 = 2
> 2 + 2 == 4
> 2 + 2 <= 3
```

```
> 0 != 1 and 7 < 5
> 0 == 1 or 7 >= 5
> not 3.0 == 3
> True or true
```

e)
```
> int(14.3)
> int(-14.3)
> float(12)
> str(147)
> int("289")
```

Exercice 1.3 Même consigne. Pour expliquer le travail de Python, vous remplirez un tableau à double entrée où figureront les valeurs des différentes variables après exécution de chaque instruction.

a)
```
> a = 25 ; b = 3
> c = a * b
> d = (c - a) / b
> d
```

b)
```
> mot = "grenouille"
> len(mot)
> x = mot[0]
> y = mot[2:6]
> x + y
```

c)
```
> u = 2 ; v = 1.5
> type(u), type(v)
> type(u + v)
> type(u * v)
```

d)
```
> i = 3 ; j = 4
> k = i
> i = j
> j = k
> i, j
```

e)
```
> ma_var = "joli"
> ma-var
> ma_var == joli
```

f)
```
> f = 2 ; i = 3
> f = f*i ; i = i+1
> f = f*i ; i = i+1
> f = f*i ; i = i+1
> f = f*i ; i = i+1
> f
```

Exercice 1.4 Sans utiliser l'ordinateur, indiquer, pour chaque question, ce qui s'affiche après la dernière instruction, y compris si c'est un message d'erreur. Dans ce dernier cas, corriger l'erreur. Vous pourrez ensuite vérifier sur ordinateur.

a)
```
> r = 1
> r = r + r * r
> r = r + r * r
> r = r + r * r
> r
```

b)
```
> a = 2 ; b = -1
> a = a*b ; b = a*b
> a = a*b ; b = a*b
> a = a*b ; b = a*b
> a, b
```

c)
```
> ch = "boulangerie"
> b = ch[:1]+ch[4:7]
> B = 2 * (b + " ")
> B = "B"+B[1:]+"!"
> B
```


d)
```
> N = 2015
> n = 2015  // 29
> p = 2015  % 29
> Q = 30 * n + p
> N == Q
```

e)
```
> x = "5"
> y = 5
> z = x * y
> z = int(z) / 5
> z
```

f)
```
> from math import *
> cd1 = (e == 2.71)
> cd2 = (pi == 3.14)
> cd0 = cd1 or cd2
> cd0
```

Exercice 1.5 Écrivez sur papier une suite de 5 à 10 instructions en Python, puis faites deviner le résultat par votre voisin(e). Vous pourrez ensuite vérifier sur ordinateur.

Exercice 1.6 Utilisez Python pour calculer de grandes puissances de 2, d'abord sous la forme `2**n`, puis sous la forme `2.0**n`. Le résultat est-il le même ? Que se passe-t-il pour de grandes, voire très grandes valeurs de n ?

Exercice 1.7 Écrire sur papier une suite d'instructions qui permet de calculer le terme f_{10} de la suite de Fibonacci, définie par $f_0 = f_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Tester ensuite ces instructions dans la console.

Exercice 1.8 On définit la chaîne de caractères :
```
> mensonge = "En Biosup 3, on n'est pas les rois !"
```
Utiliser le tronçonnage et la concaténation pour définir une chaîne `verite` qui contient la même phrase, mais à la forme affirmative, éventuellement agrémentée de superlatifs de votre choix.

Exercice 1.9 On code les lettres de l'alphabet en les numérotant de 1 à 26. On définit :
```
> AZ = "abcdefghijklmnopqrstuvwxyz"
```
À l'aide de cette chaîne de caractères, écrire des instructions permettant de décoder le mot :

1-13-9-2-15-26-15-1-9-18-5

Attention, il y a un piège : vérifiez comment sont numérotées les chaînes de caractères en Python...

Exercice 1.10 Dans la mémoire d'un ordinateur, les nombres sont stockés en base 2, et non en base 10. En base 10, on dispose des chiffres de 0 à 9 ; le nombre 263 représente $2.10^2 + 6.10^1 + 3.10^0$. En base 2, on dispose des chiffres 0 et 1 ; le nombre $\underline{101}$ représente $1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$, c'est-à-dire 5.

a) Traduire de la base 2 à la base 10 les nombres $\underline{11}$; $\underline{110}$; $\underline{10101}$; $\underline{111111}$; $\underline{1000000}$; $\underline{10001001011}$.

b) Traduire de la base 10 à la base 2 les nombres 7 ; 17 ; 24 ; 65 ; 100 ; 1000.

II - Fonctions, instructions conditionnelles

Exercice 1.11 Sans utiliser l'ordinateur, indiquer, pour chaque question, ce qui s'affiche après les dernières instructions (y compris si c'est un message d'erreur). Expliquer.

a)
```
> def aire(a, b):
>     return a * b
> aire(3, 4)
> aire(37.5, 6.4)
```

b)
```
> if 1 + 2 ** -100 == 1:
>     print("Erreur d'arrondi...")
> else:
>     print("Quelle precision !")
```

c)
```
> def inverse(x):
>     if x != 0:
>         y = 1.0 / x
>     else:
>         y = "non defini"
>     return y
> inverse(1.25)
> inverse(inverse(30))
```

Exercice 1.12 Expliquer ce que font les procédures suivantes.

a)
```
def conversation():
    print("Bonjour, je suis Python.")
    nom = input("Quel est ton nom ?")
    an = input("Et ton annee \
                    de naissance ?")
    age = 2015 - int(an)
    print("Tu as donc ",age," ans.")
    print("Au revoir, ",nom," !")
```

b)
```
def jeu():
    from random import randrange
    x = randrange(0,10)
    y = input("Choisis un chiffre :")
    if y == x:
        print("Gagne !")
    else:
        print("Perdu !")
```

Pour traiter les exercices suivants, il est conseillé d'écrire d'abord le programme sur papier : n'oubliez pas que, le jour du concours, vous serez évalué(e) à l'écrit, sans accès à un ordinateur. Au moment dde passer sur écran, ouvrez un fichier et sauvegardez-le dans un sous-dossier `"Python"` de votre dossier `"Mes Documents"`, par exemple sous le nom `"chapitre1.py"`. Vous pourrez taper toutes vos fonctions dans le même fichier.

Attention ! Le suffixe `".py"` est essentiel, et c'est vous qui devez le taper. Si vous l'oubliez, vous ne bénéficierez pas de la coloration syntaxique ni de la gestion de l'indentation, et vous ne pourrez pas rouvrir votre fichier par la suite.

Exercice 1.13 **a)** Écrire une fonction `km2mm(dist)` qui reçoit un nombre `dist`, représentant une distance en kilomètres, et renvoie sa conversion en millimètres.
b) Écrire une fonction `mm2km(dist)` qui fait l'opération inverse.

Exercice 1.14 Écrire une fonction `aire_disque(rayon)` qui reçoit un nombre `rayon` et renvoie l'aire d'un disque de ce rayon. On utilisera la valeur de π disponible dans la variable `pi` du module `math` :
```
> from math import pi
```

Exercice 1.15 Écrire une fonction `mention(note)` qui prend en argument un nombre `note` entre 0 et 20, et qui renvoie la mention correspondante au baccalauréat (`"non admis"`, `"passable"`, `"assez bien"`, `"bien"`, `"tres bien"`).

Exercice 1.16 Écrire une fonction `prixttc(prixht, taux)` qui reçoit un nombre `prixht` et une lettre `taux` (`"A"`, `"B"` ou `"C"`), et renvoie le prix TTC après application de la TVA au taux A (5%), B (10%) ou C (20%).

Exercice 1.17 Écrire une procédure `calcul_mental()` qui demande au joueur combien vaut 2+2, et lui indique si sa réponse est correcte ou erronée.

Exercice 1.18 En utilisant la fonction `randrange(debut, fin)` du module `random`, écrire une procédure `yams()` qui tire cinq chiffres au hasard entre 1 et 6, les affiche, et félicite le joueur s'il a obtenu un Yam's, c'est-à-dire cinq chiffres identiques.

Exercice 1.19 Écrire une procédure `inutile()` qui demande à l'utilsateur son nom et son prénom, puis lui indique si son nom est plus long que son prénom, ou le contraire.

Exercice 1.20 Écrire une fonction `s2hms(temps)` qui reçoit un entier `temps`, représentant une durée exprimée en seconde, et renvoie une chaîne de caractères représentant la conversion de cette durée en heures, minutes, secondes. Par exemple, `s2hms(10000)` renverra la chaîne `"2h 46min 40s"`.

Exercice 1.21 Écrire une fonction `bissextile(annee)` qui teste si une année est bissextile et renvoie un booléen (`True` ou `False`). On rappelle que les années bissextiles reviennent tous les 4 ans, sauf les années séculaires, à moins que celles-ci ne soient multiples de 400.

Chapitre 2

Les bases du langage mathématique

I - Propositions logiques et quantificateurs

Exercice 2.1 Compléter en respectant l'ordre alphabétique.

a) Soient $n, \dots, \dots$ des entiers. **b)** Soit $(\alpha, \dots, \dots, \dots) \in \mathbb{R}^4$. **c)** Soient $\lambda, \dots, \dots$ des réels.

Exercice 2.2 Parmi les phrases suivantes, indiquer celles qui sont mathématiquement correctes, puis compléter ces phrases en indiquant la nature des objets mathématiques qui y figurent.

a) f est définie pour $x \in [0, 1]$.
b) f est définie sur $[0, 1]$.
c) $f(x)$ est défini pour $x \in [0, 1]$.
d) $f(x)$ est défini sur $[0, 1]$.
e) f est croissante sur $[0, 1]$.
f) $f(x)$ est croissante sur $[0, 1]$.
g) u_n est bornée.
h) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 2.3 Donner la valeur de vérité (VRAI ou FAUX) de chacune des propositions suivantes :

a) $0 = 0$ et $2 + 2 = 5$
b) $0 = 0$ ou $2 + 2 = 5$
c) $0 = 0 \;\Rightarrow\; 2 + 2 = 5$
d) $0 = 0 \;\Rightarrow\; 2 + 2 = 4$
e) $0 = 1 \;\Rightarrow\; 2 + 2 = 5$
f) $0 = 1 \;\Rightarrow\; 2 + 2 = 4$
g) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$
h) $\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq 1$
i) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leqslant 0$
j) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leqslant 0$
k) $\forall x \in \mathbb{R}, [x \geqslant 0 \Rightarrow x+2 = 4]$
l) $\exists x \in \mathbb{R}, [x \geqslant 0 \Rightarrow x+2 = 4]$

Exercice 2.4 Écrire la négation de chacune des propositions logiques de l'exercice précédent. Dans les propositions qui contiennent des implications, remplacer celles-ci par leurs contraposées.

Exercice 2.5 Donner les contraposées des implications suivantes :

a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \geq A \;\Rightarrow\; f(x) \geq B$.
b) $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(y)$.

Exercice 2.6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Parmi les propositions suivantes, trouver celle qui est forcément vraie, et celle qui est forcément fausse. Pour chacune des deux autres propositions, trouver une fonction f qui la rend vraie, et une fonction f qui la rend fausse.

a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$
b) $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$
c) $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$
d) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$

Exercice 2.7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Ecrire en langage mathématique les assertions suivantes, et leurs négations :

a) f est l'application nulle
b) f s'annule au moins une fois sur $[-1, 1]$.
c) f est une fonction constante.
d) f atteint son maximum en 2.
e) f est croissante sur $[0, 3]$.
f) f est strictement décroissante.
g) f est majorée sur $[0, 1]$.
h) f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.8 Écrire la négation de chacune des propositions logiques de l'exercice précédent.

II - Écriture des ensembles, opérations

Exercice 2.9 Compléter avec les symboles convenables ($\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$) :

a) $\pi/2$ ... $[0,1]$
b) $\sqrt{289}$ ... $\mathbb{Z}$
c) -11 ... $\mathbb{N}$
d) $\{e\}$ ... $\mathbb{R}^+$
e) (-1, 1) ... $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}^+$
f) $[-1,1]$ ... $[0,+\infty]$
g) $\{0,1,2\}$ ... $\mathscr{P}(\mathbb{R})$
h) (1, 0, -1, 0) ... $\mathbb{R}^3$
i) $\mathbb{Q}$ ... $\mathbb{C}$

Exercice 2.10 Représenter, sur la droite des réels, chacun des ensembles suivants.

a) $A=\left\{0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},\text{-}e,\text{-}\pi\right\}$
b) $B=[0,3]\cup]2,5[$
c) $C=[0,3]\cap]2,5[$
d) $D=\mathbb{R}^+\cap\big([\text{-}2,2[\cup]3,4]\big)$
e) $E=\mathbb{R}^-\cup\big([\text{-}2,2[\cap]1,4]\big)$
f) $F=]\text{-}\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}[+2\pi\mathbb{Z}$
g) $G=[0,1]\cup\big(\mathbb{Z}\cap]\text{-}5,5[\big)$
h) $H=[0,5]\setminus\{2,3\}$
i) $I=[\text{-}3,3]\setminus]\text{-}\infty,1]$

Exercice 2.11 Énumérer les éléments des ensembles suivants, et indiquer leur nombre.

a) $A=\left\{2k+1\ ;\ k\in[\![0,4]\!]\right\}$
b) $B=\left\{(\text{-}1)^n\ ;\ n\in[\![0,10]\!]\right\}$
c) $C=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ (x-1)(x^2-2x)=0\right\}$
d) $D=\left\{z\in\mathbb{C}\ \middle|\ z-2i=iz+2\right\}$
e) $E=A\times C$
f) $F=\mathscr{P}(C)$
g) $G=\mathscr{P}_2(A)$
h) $H=B^3$

Exercice 2.12 Écrire, sous forme de réunions d'intervalles, les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

a) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x>5 \text{ et } x\leqslant 8\right\}$
b) $B=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x>5 \text{ ou } x\leqslant 8\right\}$
c) $C=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ [x>-1 \text{ et } x\leqslant 3] \text{ ou } x\geqslant 0\right\}$
d) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x\leqslant 5 \text{ et } [x\leqslant 3 \text{ ou } x<0]\right\}$
e) $E=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x\geqslant 1\ \Rightarrow\ x>3\right\}$
f) $F=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x>3\ \Rightarrow\ x\geqslant 1\right\}$

Exercice 2.13 Soient X une partie de $\mathbb{R}$ telle que $X\cup[0,1]=X\cap[0,1]$.
En procédant par double inclusion, montrer que $X=[0,1]$.
Indication : on peut remplacer «partie de $\mathbb{R}$» par «groupe d'élèves de Chatô» et «[0, 1]» par «BCPST 1C».

Exercice 2.14 Soient A et B deux parties d'un ensemble Ω.
En procédant par double implication, montrer que : $A\subset B\ \Leftrightarrow\ A\cap\overline{B}=\varnothing$.
Indication : vous pouvez remplacer «parties de Ω» par «groupe d'élèves de BCPST».

Chapitre 3

Fonctions : propriétés générales

I - Fonctions usuelles

Exercice 3.1 Rechercher sur internet le poème de Jacques Prévert intitulé «Page d'écriture». Néanmoins, calculer (et apprendre à reconnaître) au moins les dix premières puissances de 2, les cinq premières puissances de 3 et les quatre premières puissances de 5.

Exercice 3.2 Soit x un nombre réel. On pose $f(x) = x^2 \ln x$. Calculer f en les valeurs suivantes :

$$e, \qquad \frac{1}{e}, \qquad \sqrt{e}, \qquad e^2, \qquad e\sqrt{e}, \qquad \frac{1}{e^2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{e}}\ .$$

Exercice 3.3 Simplifier, autant que possible, les expressions suivantes :

a) $A = \dfrac{\ln(81) - \ln(9)}{\ln\sqrt{3}}$

b) $B = \ln\left((\sqrt{5}+1)^{18}\right) + \ln\left((\sqrt{5}-1)^{18}\right)$,

c) $C = \ln\sqrt{\dfrac{1}{e^{-x}}}$,

d) $D = \left[\exp\left(-\dfrac{1}{\ln\frac{1}{x}}\right)\right]^{\ln\frac{1}{x^2}}$.

e) $E = (\ln x)^2 - \ln(x^2) + 1$

f) $F = \ln(e^{x(y+1)} - e^x) - x$

Exercice 3.4 Soit n un entier naturel et x un réel strictement positif. Simplifier :

a) $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^5}$ **b)** $\left(\sqrt[6]{3}\right)^3$ **c)** $\sqrt[5]{3}\sqrt[3]{9}\,\sqrt[15]{3^2}$ **d)** $\dfrac{x^3x^{5n}}{x^{2n}x^5}$ **e)** $(x^{-n+1})^2(x^3)^{n-2}$ **f)** $(2^{2n^2})^{(\frac{2}{n})^2}$

Exercice 3.5 Sans vous référer au polycopié du cours, tracer le graphe et résumer les principales propriétés de l'une quelconque des fonctions exp, ln, sin, cos, tan, puissance α (pour un $\alpha \in \mathbb{R}$ de votre choix), valeur absolue, partie entière.

Exercice 3.6 On note $\mathscr{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-ensembles, respectivement, des fonctions paires et impaires, et $\tilde{0}$ la fonction nulle. Traduire en langage mathématique les phrases suivantes :

a) La fonction exp n'est ni paire ni impaire.

b) Les fonctions $x \mapsto \sin(kx)$ sont impaires.

c) La fonction nulle est paire et impaire.

d) Toute fonction paire et impaire est nulle.

Exercice 3.7 Tracer les graphes des fonctions suivantes. Avant ou après ce tracé, pouvez-vous indiquer par quelle transformation géométrique ce graphe peut être obtenu à partir du graphe d'une fonction usuelle vue en cours ?

a) $f : x \mapsto e^{-x}$

b) $g : x \mapsto 2 - e^x$

c) $h : x \mapsto -e^{-x}$

d) $i : x \mapsto \ln(x-3)$

e) $j : x \mapsto 1 + \sin(2x)$

f) $k : x \mapsto 3\cos(x + \frac{\pi}{4})$

Exercice 3.8 Dans chaque question, simplifier l'expression de $f(x)$ en distinguant selon la valeur de x, puis tracer la courbe représentative de la fonction f.

a) $f(x) = |x-3| - |2x+1|$ **b)** $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$, $x \in [-2, 2]$ **c)** $f(x) = \lfloor x \rfloor + |x|$, $x \in [-3, 3]$

Exercice 3.9 Montrer que pour tout réel x, on a :

a) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

b) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

c) $2x - 1 < \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil < 2x + 1$

d) $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

Indication : on distinguera selon que $x \in \mathbb{Z}$ ou $x \in]n, n+1[$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

II - Ensemble de définition, étude des symétries

Exercice 3.10 Déterminer les ensembles de définition des fonctions définies par les formules suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{2x^2 + 5x - 3}$

b) $g(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

c) $h(x) = \ln\big(3 - |x - 4|\big)$

d) $j(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

e) $k(x) = \ln(\ln(x))$

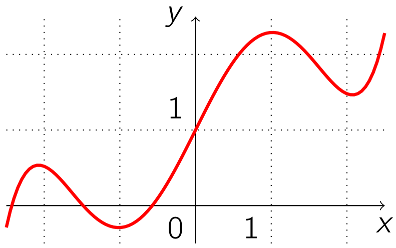
f) $l(x) = \sqrt{3x - 1 - 2x^2}$

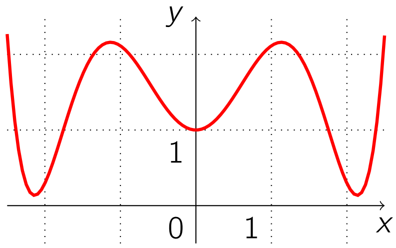
g) $m(x) = \ln\big(x(1-x) - 2\big)$

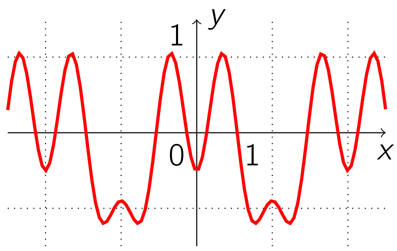
h) $n(x) = \dfrac{1}{\ln(4x - 3x^2)}$

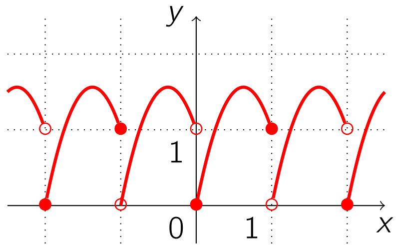
i) $p(x) = \sqrt{\cos x}$

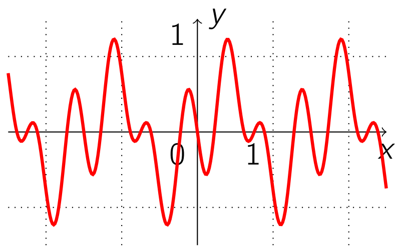
Exercice 3.11 Pour chacun des graphes suivants, indiquer si la fonction correspondante semble être paire, impaire, périodique (et dans ce cas préciser la plus petite période apparente). Aucune justification n'est demandée.

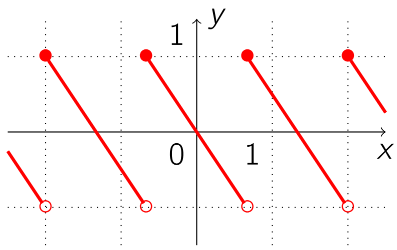
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

Exercice 3.12 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

a) Montrer que, si les fonctions f et g sont paires, alors la somme $f + g$ est une fonction paire. Que dire si f et g sont impaires, si f est paire et g impaire ?

b) Mêmes questions avec le produit fg.

c) Mêmes questions avec le quotient f/g (en supposant que la fonction g ne s'annule pas).

d) Mêmes questions avec la composée $g \circ f$.

Exercice 3.13 Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition, indiquer si elle est paire ou non (avec preuve), et si elle est impaire ou non (avec preuve).

a) $x \mapsto 3\ln(\pi + x^2) + 1$

b) $x \mapsto \dfrac{2x^5 - 7x^3}{x^4 - x^2 + 3}$

c) $x \mapsto x\cos x - x^2 \tan x$

d) $x \mapsto e^{x^3 + 3x}$

e) $x \mapsto \cos(5x) + \sin(4x)$

f) $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

g) $x \mapsto \ln \dfrac{1-x}{1+x}$

h) $x \mapsto \ln\big(x + \sqrt{1 + x^2}\big)$

Exercice 3.14 Pour chacune des fonctions suivantes, donner son ensemble de définition, indiquer si elle est périodique, et le cas échéant en donner une période (la plus petite possible).

a) $a(x) = \cos(2x)$

b) $b(x) = \sin(5x)$

c) $c(x) = \cos(x/3)$

d) $d(x) = \tan(\pi x)$

e) $e(x) = 5\sin(2x) + 3\sin(4x)$

f) $f(x) = \sin(3x) - 7\tan x$

g) $g(x) = \sin(x)\sin(2x)\sin(3x)$

h) $h(x) = 2x - \sin x$

i) $i(x) = \tan(90x) - \tan(78x)$

Exercice 3.15 Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $h(x) = \left|x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right|$.

a) Tracer le graphe de la fonction h sur l'intervalle $[-2, 2]$.

b) La fonction f est-elle paire, impaire, périodique ?

III - Équations et inéquations, fonctions bijectives

Exercice 3.16 Donner un encadrement des expressions suivantes lorsque t parcourt l'intervalle $[0,3]$:

a) $\dfrac{2}{t+5}$, **b)** $|t-2|$, **c)** $\dfrac{1}{t^2+1}$.

Exercice 3.17 Résoudre les équations et inéquations suivantes. Il sera parfois utile de déterminer leurs domaines de validité pour éviter de donner des solutions qui n'ont pas de sens.

a) $e^{2x+1} = e^{\frac{6}{x}}$.

b) $e^{2x-1} > e^{-x^2+3}$

c) $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

d) $|x^2 + 2x - 3| < 6$.

e) $|x^2 + 2x| < 3|x|$.

f) $\ln(2x) = \ln(x^2 - 1)$.

g) $\ln(2x) \geq \ln(x^2 - 1)$.

h) $\sqrt{x+1} = 5 - x$,

i) $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

j) $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$.

k) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3$

l) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} = 12$.

m) $2\ln(x+1) + \ln(3x+5) + \ln 2 = \ln(6x+1) + \ln(x-2) + \ln(x+2)$.

Exercice 3.18 Pour chacune des équations ou inéquations suivantes, écrire l'ensemble de ses solutions, d'abord avec des pointillés, puis en utilisant la notation du cours pour les ensembles périodiques.

a) $\sin x = 0$

b) $\cos x = \frac{1}{2}$

c) $0 \leqslant \sin x < 1$

d) $\tan x = 1$

e) $\tan 2x = \sqrt{3}$.

f) $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = -1$

g) $2\cos(2x) + 4\cos x + 3 \leqslant 0$

h) $2\cos 2x < \sqrt{2}$,

Exercice 3.19 Résoudre les systèmes de deux équations à deux inconnues :

a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=13 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x^2-y^2=119 \\ x-y=7 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x^2+y^2=218 \\ x+y=20 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 3(\dfrac{\ln y}{\ln x} - \dfrac{\ln x}{\ln y}) = 8 \\ xy = 9 \end{cases}$.

Exercice 3.20 Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, prouver qu'elle est bijective (en précisant les ensembles de départ et d'arrivée) et donner la bijection réciproque.

a) $x \mapsto 5x - 13$

b) $x \mapsto \exp(\tan(-x))$

c) $x \mapsto \dfrac{2x+1}{5x+3}$

d) $x \mapsto 1 - \sqrt{2x-6}$

e) $x \mapsto \ln(1+e^x)$

f) $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

g) $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

h) $x \mapsto 2x + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

Exercice 3.21 Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil - x$.

a) Tracer le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2, 2]$.

b) La fonction f est-elle paire, impaire, périodique ?

c) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(f(x))$. En déduire que la fonction f est bijective, et donner sa bijection réciproque.

Exercice 3.22 Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que : $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Chapitre 4

Fonctions : variations et limites

I - Dérivation

Exercice 4.1 Déterminer l'ensemble de définition, le domaine d'existence de la dérivée et la dérivée des fonctions définies par :

a) $f(x) = \ln(x^2 - 3)$
b) $f(x) = \cos(1 - x)$
c) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$
d) $f(x) = 2\sin^2 x \cos x$
e) $f(x) = \cos(x^3)$
f) $f(x) = \tan^3 x$
g) $f(x) = \arctan(e^x)$
h) $f(x) = e^{\arctan x}$
i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
j) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 + x^2}$
k) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x + 2)}$
l) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{1 + x^2}\right)$
m) $f(x) = x^x$.
n) $f(x) = (1 + x^2)^{1/x}$.

Exercice 4.2 Calculer les dérivées secondes et troisièmes des fonctions a) à d) de l'exercice précédent.

Exercice 4.3 Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'équation de sa tangente au point considéré :

a) $a(x) = \ln(x^2 + 1)$, en $x = 1$;
b) $b(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, en $x = 0$;
c) $c(x) = \ln(1 + xe^x)$, en $x = -1$;
d) $d(x) = \dfrac{x^4 - 4}{x^2 + 2}$, en $x = 2$.

Exercice 4.4 En dressant leurs tableaux de variations, rechercher les extremums (maximum, minimum) des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :

a) $a(x) = x(1 - x)$; **b)** $b(x) = x \ln x$; **c)** $c(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; **d)** $d(x) = \cos x + \sin x$.

Exercice 4.5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $g(x) = f(-x)$.
a) Montrer que la fonction g est dérivable et calculer sa dérivée.
b) En déduire que, si f est paire, alors sa dérivée f' est impaire. Et si f est impaire ?

Exercice 4.6 **a)** À l'aide d'une étude de fonction, montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ \sin x \leqslant x$.
b) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|$.

Exercice 4.7 Sans calculatrice, comparer les deux réels e^π et π^e (utiliser une étude de fonction).

Exercice 4.8 Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.
a) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de la fonction f, puis calculer sa dérivée. On doit trouver un résultat *très* simple.
b) Étudier la parité de la fonction f. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
c) En déduire une expression plus simple de $f(x)$, en distinguant selon la valeur de x.

Exercice 4.9 Mêmes questions pour la fonction g définie par $g(x) = \arctan \dfrac{2x}{1 - x^2} - 2\arctan x$.

Exercice 4.10 Déterminer les dérivées partielles des fonctions définies par :

a) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 y)$; **b)** $g(x, y) = xe^{x(y^2+1)}$; **c)** $h(u, v, w) = u\cos(vw) + \dfrac{u}{v}$.

II - Calcul de limites, branches infinies

Exercice 4.11 En utilisant le symbole $\ll$, classer les expressions suivantes de la plus négligeable à la plus dominante pour $x \to +\infty$, puis pour $x \to 0^+$.
x^2 ; e^x ; $\frac{1}{x}$; $\ln(x^5)$; $(\ln x)^5$; $x \ln x$; $x\sqrt{x}$; e^{3x} ; $\frac{1}{\ln x}$; 7 ; xe^{2x} ; $\frac{x^2}{\ln x}$.

Exercice 4.12 Pour chacune des fonctions suivantes, mettre en facteur le terme dominant pour $x \to +\infty$, puis déterminer sa limite en $+\infty$.

a) $x \mapsto 5x^3 + 2x - 4$
b) $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$
c) $x \mapsto x^2 + \ln(x^3) + \dfrac{\sqrt{x}}{x}$
d) $x \mapsto e^{-x} - 2x + \dfrac{3}{\ln x}$
e) $x \mapsto x + \sin x$
f) $x \mapsto \sqrt{9x^4 + 7 + \dfrac{5}{x^2}}$
g) $x \mapsto \ln(9x^4 + 7 + \dfrac{5}{x^2})$
h) $x \mapsto \ln(1 + e^x + x)$
i) $x \mapsto \ln(2^x + 3^x)$

Exercice 4.13 Pour chacune des fonctions de l'exercice précédent, mettre en facteur le terme dominant pour $x \to 0^+$, puis déterminer sa limite en 0^+.

Exercice 4.14 Utiliser la méthode de la quantité conjuguée pour étudier les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2 - 6x + 3}\right)$.

Exercice 4.15 Utiliser les dérivées en 0 des fonctions usuelles pour déterminer les limites suivantes :
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x}{\sin x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x \ln x)}{x}$.

Exercice 4.16 Déterminer pour chacune des fonctions suivantes son ensemble de définition et ses limites aux bornes de cet ensemble.

a) $f(x) = e^x - x^2$
b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 + 5x + 7}$
c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$
d) $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$
e) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{x^2 + e^x}$,
f) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$,
g) $f(x) = \ln x - x$.
h) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$
i) $a(x) = x^x$
j) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$
k) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$
l) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$
m) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x - 3}\right)$
n) $b(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$
o) $f(x) = \dfrac{x + |x|}{x - |x|}$
p) $g(x) = (\sin x)\left(\sin \dfrac{1}{x^2}\right)$
q) $i(x) = \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$
r) $k(x) = \ln x + \dfrac{1}{x^2}$

Exercice 4.17 Étudier la nature des branches infinies des fonctions suivantes, en $+\infty$ et $-\infty$:

a) $a(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 1}$
b) $b(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$
c) $c(x) = \ln(1 + xe^x)$
d) $d(x) = \dfrac{x^4 - 5\ln|x|}{x^2 + 3}$

Exercice 4.18 Étudier les positions relatives des courbes d'équations :

a) $y = x \ln x$ et $y = x$, pour $x > 0$
b) $y = x^3 - 2x$ et $y = x$, pour $x \in \mathbb{R}$
c) $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 5}$ et $y = 2x+1$, pour $x \in \mathbb{R}$
d) $y = e^{-2x} - 3e^{-x}$ et $y = 4$, pour $x \in \mathbb{R}$

III - Etudes complètes de fonctions

Les exercices suivants doivent être traités sans recours à la calculatrice (qui pourra néanmoins être utilisée pour vérifier le résultat final). L'enjeu n'est pas de tracer fidèlement la courbe de la fonction étudiée, mais d'en faire ressortir l'allure générale, quitte à exagérer certaines caractéristiques pour les rendre plus visibles. Il est important de bien choisir l'échelle du dessin et le domaine de représentation (si l'énoncé ne les impose pas) ; un dessin bien «calibré» doit occuper entre le quart et la moitié d'une feuille A4.

Exercice 4.19 On considère la fonction h définie par $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
a) Déterminer le domaine de définition de la fonction h, puis étudier sa parité.
b) Dresser le tableau de variation de h, et préciser les limites de h aux bornes de son domaine.
c) Étudier la branche infinie de h pour $x \to +\infty$, en précisant la position de la courbe de h par rapport à son éventuelle asymptote. Que dire pour $x \to -\infty$?
d) À l'aide des éléments précédents, donner l'allure de la courbe représentative de la fonction h.

Exercice 4.20 On considère la fonction f définie pour x réel par $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
a) Vérifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, puis étudier ses variations et limites.
b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ de f admet des asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$. Donner des équations de ses asymptotes, ainsi que de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse nulle.
c) Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$, à l'aide des éléments précédents.

Exercice 4.21 On considère la fonction u définie pour x réel par $u(x) = \sin(2x) - \tan x$.
a) Déterminer le domaine de définition D de la fonction u. Étudier sa parité et sa périodicité.
b) Expliquer comment l'étude de la fonction u sur l'intervalle $I = [0, \pi/2[$ permettra de tracer sa courbe sur le domaine D tout entier.
c) Résoudre l'équation $u(x) = 0$.
d) Résoudre, pour $x \in I$, l'équation $\cos^2(2x) + \cos(2x) - 1 = 0$. On trouve une unique solution α.
e) Calculer la dérivée de la fonction u. En utilisant la relation $2\cos^2 x = \cos(2x) + 1$, montrer que, sur l'intervalle I, la dérivée u' s'annule uniquement en α.
f) Dresser le tableau de variation de la fonction u sur l'intervalle I, en précisant les valeurs et limites aux bornes. Donner l'équation de la tangente à la courbe de u au point d'abscisse $x = 0$.
g) À l'aide des éléments précédents, tracer la courbe de u (au moins entre $-3\pi/2$ et $3\pi/2$).

Exercice 4.22 On considère la fonction g définie pour x réel par $g(x) = \dfrac{x^2}{2\pi} \sin \dfrac{2\pi}{x}$.
a) Préciser le domaine D de définition de la fonction g, et étudier sa parité.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $g(x) = 0$.
c) Montrer que, pour tout $x \in D$, $-x^2 \leqslant g(x) \leqslant x^2$, et préciser pour quelles valeurs de x l'une des inégalités devient une égalité. En déduire la limite de g à droite en 0.
d) Etudier la limite de g en $+\infty$, et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) \leqslant x$.
On admet que la droite d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de g.
e) A l'aide des éléments, précédents, donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

Chapitre 5
Boucles

Exercice 5.1 Pour chacune des questions, deviner ce qui s'affiche après exécution de la dernière instruction. Vérifier ensuite avec Python.

a)
```
> a = 1
> for i in range(10) :
      a = a + a
> a
```

b)
```
> dispute = "- Bébé !\n"
> for k in range(2,6) :
      dispute += "- Arrête !\n"
      dispute += k*"- Non!\n- Si !\n"
> dispute += "- Ouiinn..."
> print(dispute)
```

c)
```
> x = 1
> while x < 1000:
      x = x ** 2 + 1
> x
```

d)
```
> mot = "anticonstitutionnellement"
> i = 0 ; N = 0
> while i < len(mot):
      if mot[i] == "t":
          N = N + 1
> N
```

e)
```
> s = 7 ; i = 0
> while i < 20 and s != 1:
      if (s%2 == 0):
          s = s // 2
      else:
          s = 3 * s + 1
      i = i+1
> s
```

Exercice 5.2 Expliquer ce que font ou renvoient les fonctions suivantes.

a)
```
> def jeu_en_boucle():
      reponse = input("On joue ?")
      while reponse == "oui":
          print("JEU !!!")
          reponse = input("Encore ?")
      print("Au revoir...")
```

b) Ici, `k` est un entier positif ou nul.
```
> def triplodocus(k):
>     P = 1
>     for i in range(k):
>         P = 3 * P
>     return P
```

c) Ici, `mot` est une chaîne de caractères.
```
> def srevne(mot):
>     tom = ""
>     for i in range(len(mot)):
>         tom = mot[i] + tom
>     return tom
```

d) Ici, `x` est un nombre (`int` ou `float`).
```
> def plafond_carre(x):
>     a = 0
>     while a ** 2 < x:
>         a = a + 1
>     return a ** 2
```

Exercice 5.3 Dans chacune des questions, le programme ne fournit pas le résultat attendu, ou renvoie une erreur. Trouver pourquoi, et corriger le programme. Attention, il peut y avoir plusieurs «bugs»...

a) On veut calculer 19!.
```
> for i in range(19):
      fact = fact * i
> fact
```

b) On veut obtenir le terme f_{12} de la suite de Fibonacci, avec $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.
```
> u = v = 1
> for i in range(12)
      u = v ; v = u + v
> v
```

c) On veut définir une fonction qui renvoie l'emplacement du premier `'e'` dans un mot donné.
```
> def epe(jolimot)
> k = 1
> while jolimot[k] == 'e':
>     k = k+1
> return k
```

Exercice 5.4 Écrire une fonction `fact(n)` qui calcule la factorielle de `n`.

Exercice 5.5 Écrire une fonction `u(n)` qui reçoit un entier `n` strictement positif, et renvoie le terme u_n de la suite définie par $u_1 = 3$ et, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 1 + nu_{n-1}$.

Exercice 5.6 Écrire une fonction `v(a,n)` qui reçoit un réel `a` et un entier positif `n`, et renvoie le terme v_n de la suite définie par $v_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2} + \dfrac{1}{v_n}$. Si le terme v_n n'est pas défini, la fonction devra renvoyer la chaîne `"nondef"`.

Exercice 5.7 **a)** Écrire une fonction `harm(n)` qui renvoie la somme des inverses des `n` premiers entiers non nuls. Par exemple, `harm(3)` renverra $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, c'est à dire `1.8333`.
b) Écrire une fonction `harmim(n)` qui renvoie la somme des inverses des `n` premiers entiers impairs.
c) Écrire une fonction `riemman(n)` qui renvoie la somme des inverses des `n` premiers carrés d'entiers.
d) Calculer `harm(n)` et `riemmann(n)` pour des `n` de plus en plus grands. Que constate-t-on ?

Exercice 5.8 Écrire une fonction `asterix(mot)` qui reçoit une chaîne de caractères `mot`, la recopie en insérant des astérisques entre les caractères, et renvoie le résultat. Par exemple, `asterix('gaston')` devra renvoyer `'g*a*s*t*o*n'`.

Exercice 5.9 Écrire une fonction `palindrome(mot)` qui teste si une chaîne de caractères est un palindrome, et renvoie un booléen. Par exemple, `palindrome('kayak')` renverra `True`.

Exercice 5.10 Écrire une fonction `cesar(mot,n)` qui reçoit une chaine `mot`, constituée uniquement de caractères minuscules non accentués (de `'a'` à `'z'`), et un entier `n`, et applique à la chaîne `mot` le «code de César», c'est-à-dire un chiffrement par décalage (circulaire) de `n` places. Par exemple, `cesar('aziliz',1)` renverra `bajmja`.
Pour transformer les caractères en nombres et inversement, vous pouvez utiliser la fonction `ord(c)` et sa réciproque, la fonction `chr(i)`. Vous pouvez chercher «ASCII» et «Python ASCII» sur internet pour plus d'explications.

Exercice 5.11 Écrire une fonction `compte(mot,`lettre) qui reçoit une chaîne de caractères `mot` et un caractère `lettre`, et renvoie le nombre d'occurences du caractère `lettre` dans la chaîne `mot`.

Exercice 5.12 Expliquer ce que font ou renvoient les deux fonctions suivantes.

a)
```
> def bigsum(N):
>     S = 0
>     for a in range(N):
>         for b in range(N):
>             S = S + a * b
>     return S
```

b)
```
> def galaxies(univers):
>     l = length(univers)
>     for i in range(l):
>         for j in range(i,l):
>             print(univers[i:j+1])
```

Exercice 5.13 À l'aide de deux boucles imbriquées, écrire des instructions qui calculent $\displaystyle\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=3}^{7}\frac{1}{i+j}$.

Exercice 5.14 Écrire une suite d'instructions qui affichent les tables de multiplications des nombres de 1 à 10. On devra utiliser deux boucles imbriquées.

Exercice 5.15 Écrire une fonction booléenne `sous_chaine(petite,grande)` qui reçoit deux chaînes de caractères, et teste si la chaîne `petite` apparaît à l'intérieur de la chaîne `grande`. Par exemple, `sous_chaine("si","raisin")` renverra `True`.

Chapitre 6

Nombres entiers

I - Récurrence

Exercice 6.1 Soit x un réel strictement positif. Montrer l'inégalité de Bernoulli :
$$\forall n \geqslant 2,\ (1+x)^n > 1+nx.$$

Exercice 6.2 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{2x}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (2^n x + 2^{n-1} n)e^{2x}.$$

Exercice 6.3 Prouver : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n! \geqslant 2^{n-1}$.

Exercice 6.4 Trouver le plus petit rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ 2^n \geqslant n^2$.

Exercice 6.5 Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer que : $\forall\, n \geq 1,\ F_n < \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$.

Exercice 6.6 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ et, pour $n \geqslant 0$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n = 2n+1$.

Exercice 6.7 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \dfrac{x+6}{x+2}$.

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \in [1, +\infty[$.

b) À l'aide de deux études de fonctions, montrer que : $\forall x \in [1, +\infty[\,,\ |f(x) - 2| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|x-2|$.

c) Montrer alors, par récurrence, que : $\forall n \geqslant 1,\ |u_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

d) En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

II - Sommes, produits

Exercice 6.8 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de raison $\pi/4$ telle que $a_5 = 2\pi/3$

a) Exprimer a_n en fonction de n. Préciser notamment la valeur de a_0.

b) Écrire les sommes suivantes en extension (c'est-à-dire sans le symbole $\sum$), puis les calculer :
$$S_1 = \sum_{k=2}^{6} a_{2k}, \qquad S_2 = \sum_{k=4}^{10} a_{10-k}, \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{2n} a_k.$$

c) On note $T = a_7 + a_9 + a_{11} + \cdots + a_{49} + a_{51}$. Écrire la somme T à l'aide du signe $\sum$, puis la calculer.

Exercice 6.9 Calculer les sommes et produits suivants, de type «télescopique». Pour calculer les deux premiers, il suffit de les écrire avec des pointillés, et de rayer les termes qui se simplifient. Les suivants nécessitent de petites transformations pour faire apparaître le télescopage.

a) $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^2 - k^2\right]$

b) $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(3^{2k+1} - 3^{2k-1}\right)$

c) $C_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$

d) $D_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

e) $E_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k \cdot k!)$

f) $F_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2k-1}$

Exercice 6.10 Calculer les sommes suivantes (n, m étant des entiers, et a, b des réels fixés) :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} k^2$ **d)** $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} k^3$ **g)** $\displaystyle\sum_{k=7}^{23} \frac{\exp(k+2)}{\exp(2k+1)}$ **j)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k^2+n+3)$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} k^2$ **e)** $\displaystyle\sum_{j=0}^{m+1} 3^j$ **h)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} (2-k^3)$ **k)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k 2^{3k} b^{-k}$

c) $\displaystyle\sum_{k=11}^{20} k^2$ **f)** $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2^{3\ell+1}}}$ **i)** $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n} \frac{j^2}{n}$ **l)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n^2} (1-a^2)^{2k+1}$

Exercice 6.11 Calculer les sommes suivantes de deux façons différentes : d'abord en utilisant des changements d'indices bien choisis ; ensuite, à titre de vérification, en développant les termes sommés et en utilisant la linéarité de la sommation.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2$ **b)** $\displaystyle\sum_{j=3}^{n+2} (j-2)^2$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} (k+3)^3$

Exercice 6.12 Exprimer, à l'aide uniquement de factorielles, les produits

a) $\displaystyle P_n = \prod_{k=1}^{n} (2k)$ **b)** $\displaystyle I_n = \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$ **c)** $\displaystyle Q_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$ **d)** $\displaystyle C_{n,p} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$

III - Coefficients binomiaux

Exercice 6.13 Soient a, b, x, y des réels. Développer les expressions suivantes.

a) $(a+b)^7$ **b)** $(2+a)^5$ **c)** $(a-b)^{10}$ **d)** $(x+1)^8$ **e)** $(x-2y)^6$

Exercice 6.14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant habilement apparaître la formule du binôme, exprimer les sommes suivantes en fonction de n.

a) $\displaystyle A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k}$ **d)** $\displaystyle D = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$ **g)** $\displaystyle G = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} 3^k$

b) $\displaystyle B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi^k$ **e)** $\displaystyle E = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ **h)** $\displaystyle H = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k+1}$

c) $\displaystyle C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k}$ **f)** $\displaystyle F = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k$ **i)** $\displaystyle I = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{\ln 2 - k}$

Exercice 6.15 En utilisant la formule du pion, puis un changement d'indice, et enfin la formule du binôme, calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle A = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k},$ **b)** $\displaystyle B = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k},$ **c)** $\displaystyle C = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k},$

Exercice 6.16 Calculer les sommes doubles suivantes (en intervertissant les sommes si nécessaire).

a) $\displaystyle A = \sum_{k=0}^{n} \left[(k-1)\sum_{i=0}^{2} k^i\right],$ **c)** $\displaystyle C = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2^{i+j}},$ **e)** $\displaystyle E = \sum_{0 \leq k \leqslant l \leqslant n} \frac{k}{l+1},$

b) $\displaystyle B = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=1}^{m} p(q^2+1),$ **d)** $\displaystyle D = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{2^{i+j}},$ **f)** $\displaystyle F = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j} a^j b^{k-j}.$

Chapitre 7

Nombres complexes et trigonométrie

I - Calcul avec des nombres complexes

Exercice 7.1 Écrire les complexes suivants sous forme algébrique.

a) $z_1 = (2-3i)(3+i)$
b) $z_2 = (2-5i)(2+5i)$
c) $z_3 = (7+4i)^2$
d) $z_4 = (3-2i)^3$
e) $z_5 = (2+i)^4$
f) $z_6 = \dfrac{1}{3+4i}$
g) $z_7 = \dfrac{1}{1-i}$
h) $z_8 = \dfrac{3+6i}{3-4i}$
i) $z_9 = \dfrac{3+5i}{5-3i}$
j) $z_{10} = \dfrac{-1+i\sqrt{2}}{2-i\sqrt{3}}$
k) $z_{11} = \dfrac{(1+i)(7+i)}{(2-i)(3+4i)}$

Exercice 7.2 Écrire les complexes suivants sous forme trigonométrique.

a) $z_1 = 20$
b) $z_2 = -\sqrt[3]{5}$
c) $z_3 = 7i$
d) $z_4 = 1+i$
e) $z_5 = -\sqrt{3}+i$
f) $z_6 = 3-3i$
g) $z_7 = \sqrt{6}+3i\sqrt{2}$
h) $z_8 = -5e^{i3\pi/10}$

Exercice 7.3 Passer par la forme trigonométrique pour calculer les nombres suivants. Écrire le résultat sous forme algébrique.

a) $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{2015\pi}{4}}$
b) $z_2 = (1+i\sqrt{3})^9$
c) $z_3 = (\sqrt{2}-e^{i\pi/4})^{15}$
d) $z_4 = \dfrac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)^3}$
e) $z_5 = i^3(\sqrt{3}+i)^7(1+i\sqrt{3})^4$
f) $z_6 = \left(-\dfrac{2+2i}{\sqrt{3}+3i}\right)^2$

Exercice 7.4 Rappelons la notation $j = e^{i2\pi/3}$. Écrire les nombres suivants sous forme algébrique.

a) $z_1 = j^3$ **b)** $z_2 = j^2+j+1$ **c)** $z_3 = (j-1)(j^2-1)$ **d)** $z_4 = (1+j)^3$ **e)** $z_5 = (1-j)^3$

Exercice 7.5 La méthode de l'arc médian est une astuce consistant à écrire, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\alpha}+e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right) \quad \text{et} \quad e^{i\alpha}-e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\right).$$

a) Vérifier les formules ci-dessus.

On considère maintenant les nombres complexes :

$$A = e^{i\pi/3}+e^{i\pi/4} \;;\quad B = e^{i2\pi/3}-i \;;\quad C = 1+e^{i7\pi/6} \;;\quad D = 1-e^{i3\pi/4}.$$

b) À l'aide de la méthode de l'arc médian, trouver des arguments des nombres A, B, C, D.
c) Écrire les nombres A, B, C, D sous forme algébrique et calculer leurs modules.
d) Obtenir enfin l'écriture de ces nombres sous forme trigonométrique.
e) Déduire des différentes écritures de A une formule explicite pour $\cos(\pi/12)$, puis pour $\sin(\pi/12)$.

Exercice 7.6 Soit u et v deux nombres complexes. En utilisant la formule $|z|^2 = z\bar{z}$, montrer que :

$$|u+v|^2+|u-v|^2 = 2\left(|u|^2+|v|^2\right).$$

Exercice 7.7 Résoudre les équations ou systèmes d'équations suivants.

a) $iz+5 = 3i+z-2iz$
b) $z-3i = e^{i\pi/3}z+\sqrt{3}$.
c) $\begin{cases} 3x-(1+i)y = 5 \\ ix+5y = 2 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x+y+1 = 0 \\ x+jy+j^2 = 0 \end{cases}$.

Exercice 7.8 En écrivant z sous forme trigonométrique, résoudre les équations suivantes.

a) $z^2 = 3e^{-i\pi/3}$ **b)** $z^3 = 1$ **c)** $z^3 = 2-2i$ **d)** $z^4 = -9$.

Exercice 7.9 En écrivant z sous forme algébrique, résoudre les équations suivantes.

a) $z^2 = -7 + 24i$ **b)** $z^2 = 1 - 4i\sqrt{5}$

Indication : l'astuce est d'ajouter l'équation $|z|^2 = \dots$; on peut alors facilement calculer x^2 et y^2.

Exercice 7.10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations et systèmes d'équations suivants ($\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé).

a) $z^2 - z + \sqrt{2} = 0$

b) $z^2 - 2(\cos\alpha)z + 1 = 0$

c) $u^2 - 4u + 6 = 0$

d) $4v^2 + 2v + 1 = 0$

e) $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 13 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a + b = 5 \\ ab = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \lambda + \mu = -1 \\ \lambda\mu = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = -5 \end{cases}$

Exercice 7.11 En posant $Z = z^2$, résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$ **b)** $z^4 + z^2 + 1 = 0$

Exercice 7.12 On considère l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (E).

a) Résoudre (E) en posant $Z = z + 1/z$.

b) En reconnaissant une somme géométrique, montrer que $e^{i2\pi/5}$ est solution de (E).

c) En déduire une écriture explicite de $\cos(2\pi/5)$ et $\sin(2\pi/5)$.

II - Trigonométrie

Exercice 7.13 Linéariser les expressions suivantes :

a) $\cos^3 x$ **c)** $\sin^5 x$ **e)** $\sin^7 x$ **g)** $\sin x \sin(2x) \sin(3x)$

b) $\sin^4 x$ **d)** $\cos^6 x$ **f)** $\sin x \cos^4 x$ **h)** $\cos^3 x \sin(2x)$

Exercice 7.14 Antilinéariser les expressions suivantes sous la forme indiquée, avec P un polynôme.

a) $\cos(4x) = P(\cos x)$ **c)** $\sin(5x) = P(\sin x)$

b) $\cos(5x) = P(\cos x)$ **d)** $\sin(6x) = \sin x \,.\, P(\cos x)$

Exercice 7.15 Rappelons que les fonctions du type exponentielle-sinusoïde peuvent s'écrire de trois façons différentes. Écrire les fonctions suivantes sous les deux autres formes possibles.

a) $f(x) = e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t}$ **c)** $h(t) = 3e^{-5t}\cos(\pi t) - 4e^{-5t}\sin(\pi t)$

b) $g(x) = (3 - i\sqrt{3})e^{2it} + (3 + i\sqrt{3})e^{-2it}$ **d)** $u(\theta) = 12e^{-\theta}\cos(\theta - \frac{3\pi}{4})$

Indication : on pourra noter $\alpha = \arctan\frac{4}{3}$.

Exercice 7.16 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\sin 3x = \cos 2x$, **c)** $3\sin 3x = -4$, **e)** $1 < \tan 5x \leq \sqrt{3}$.

b) $\sin x + \cos x + 1 = 0$. **d)** $2\cos 2x < \sqrt{2}$,

Exercice 7.17 Soit a un réel, n un entier naturel, t un réel. Déterminer la valeur de :

$$C(t) = \cos a + \cos(a+t) + \cdots + \cos(a+nt) \quad \text{et} \quad S(t) = \sin a + \sin(a+t) + \cdots + \sin(a+nt).$$

Indication : on pourra exprimer $C(t) + iS(t)$ à l'aide de l'exponentielle complexe, et reconnaître alors une somme géométrique.

Chapitre 8

Listes

Exercice 8.1 Sans utiliser l'ordinateur, indiquer, pour chaque question, ce qui s'affiche après la dernière instruction, y compris si c'est un message d'erreur. Dans ce dernier cas, corriger l'erreur. Vous pourrez ensuite vérifier sur ordinateur.

a)
```
> L = []
> i = 14
> while i > 0:
      L = L + [i]
      i = i - 1
> L[L[3]]
```

b)
```
> L = [1, 2, 3, 4, 5]
> M = []
> for elt in L:
      M = M + [elt] * elt
> len(M)
```

c)
```
> L = [1, 2, 3, 4, 5]
> M = L + L + L
> M[15]
```

Exercice 8.2 Pour chaque question, corriger le programme afin qu'il accomplisse la tâche indiquée.

a) On veut faire la liste des puissances de 2, depuis 2^0 jusqu'à 2^{20}.
```
> P = []
> i = 0
> x = 1
> while x <= 20
      x = x * 2
      P = P + x
> P
```

b) On veut compter le nombre d'éléments pairs dans la liste `L`.
```
> L = [13, 6, 10, 25, 14, 20, 32, 11]
> i, n = 1, len(L)
> while i < n:
      if L[i] == 0:
          n = n + 1
> n
```

Exercice 8.3 Pour chaque question, indiquer ce que renvoie la fonction.

a) `L` est une liste.
```
def etrange(L):
    globule = 0
    for aargh in L:
        globule = globule + 1
    return globule
```

b) `u` est une liste de nombres, `l` un nombre, et `epsilon` un nombre positif.
```
def bizarre(u, l, epsilon):
    canard = []
    for i in range(0, len(u)):
        if (-epsilon < u[i]-l < epsilon):
            canard = canard + [i]
    return canard
```

Exercice 8.4 Écrire une suite d'instruction qui affecte à une variable `imp` la liste des entiers impairs entre 7 et 59.

Exercice 8.5 Écrire une fonction `prefixes(mot)` qui reçoit une chaîne de caractères `mot` et renvoie la liste des sous-chaînes commençant par le premier caractère de `mot`. Par exemple, `prefixes("ouaf")` renverra la liste `["o","ou","oua","ouaf"]`.

Exercice 8.6 Écrire une procédure `affiche(maliste)` qui reçoit une liste `maliste` et affiche ses éléments sous la forme suivante :
```
> affiche([1024, "truc", 3.14])
no 0 : 1024
no 1 : truc
no 2 : 3.14
```

Exercice 8.7 Écrire une fonction `incr(numeros)` qui reçoit une liste `numeros` de nombres et renvoie une liste contenant les mêmes nombres augmentés de 1. Par exemple, `incr([2,3.1,-6])` renverra `[3,4.1,-5]`.

Exercice 8.8 **a)** Écrire une fonction `somme(termes)` qui reçoit une liste `termes` et renvoie la somme de ses éléments. Si la liste est vide, la fonction doit renvoyer 0.
b) Écrire une fonction `produit(facteurs)` qui reçoit une liste `facteurs` et renvoie le produit de ses éléments. Que renvoie cette fonction si la liste est vide ?

Exercice 8.9 **a)** Écrire une fonction `maximum(L)` qui reçoit une liste non vide `L` de nombres, et qui renvoie son maximum.
b) Écrire une fonction `place_max(L)` qui reçoit une liste `L` de nombres, et qui renvoie un indice `i` tel que `L[i]` est le maximum de la liste `L`.

Exercice 8.10 Écrire une fonction `descentes(L)` qui reçoit une liste `L` de nombres, et qui renvoie le nombre d'indices `i` tels que `L[i]` est strictement plus grand que `L[i+1]`

Exercice 8.11 Pour chacune des questions suivantes, essayer de deviner ce que vont renvoyer les instructions. Ensuite, entrer ces instructions dans Python. Comprenez-vous ce qui se passe ?

a)
```
> do = [1,2,3,4]
> re = do
> re[0] = 7
> do
```

b)
```
> do = [1,2,3,4]
> re = do[:]
> re[0] = 7
> do
```

c)
```
> def hop(L):
>     L[0] = "hop"
>     return L
> mi = [1,2,3]
> fa = hop(mi)
> mi
```

d)
```
> def hop(L):
>     M = ["hop"] + L[1:]
>     return M
> mi = [1,2,3]
> fa = hop(mi)
> mi
```

Chapitre 9

Systèmes linéaires

I - Systèmes 2×2

Exercice 9.1 Résoudre les systèmes suivants.

(a) $\begin{cases} x + y = -\pi \\ x - y = 2\pi \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0 \\ 1 - 3y + 4x = 0 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} 4a - 6b = 1 \\ -6a + 9b = 0 \end{cases}$ **(d)** $\begin{cases} 5n + 7p = 22 \\ 5n - 7p = 8 \end{cases}$

Exercice 9.2 Résoudre les systèmes suivants, en distinguant des cas suivant la valeur du réel α.

(a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ \alpha x + (1 - \alpha)y = 1 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} \alpha u + v = \alpha^2 \\ u + \alpha v = 1 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} (\alpha + 1)x - 2\alpha y = 2\alpha + 4 \\ (\alpha - 1)x - 4\alpha y = 2\alpha + 2 \end{cases}$

Exercice 9.3 Résoudre les systèmes suivants en se ramenant à des systèmes 2×2.

(a) $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ x + y + 2z = 14 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} -2x + 5y + z + t = 1 \\ 3x - 2y + 4z + t = 3 \end{cases}$

II - Systèmes de tailles diverses

Exercice 9.4 Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues réelles. Pour chaque système, on donnera son rang et on précisera s'il est de Cramer.

(a) $\begin{cases} 4y + z = 20 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ x + z = 5 \\ x + y - z = 10 \end{cases}$ **(d)** $\begin{cases} x + y = 3z + 13t + 7 \\ 2x - y = 3z + 2t + 5 \\ x - y = z - 3t + 1 \\ x = 2z + 5t + 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y + z - t = 3 \\ -3x + y + 2z + t = -8 \\ x + 3y - z + 2t = 5 \\ 2x - 3y + z - 3t = 3 \end{cases}$ **(e)** $\begin{cases} 2\alpha - \beta + 3\gamma = 1 \\ 3\alpha + \beta - \gamma = 3 \\ 5\alpha + 5\beta - 9\gamma = 7 \\ 2\alpha - 6\beta + 14\gamma = -2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2a + 7b - 3c = 2 \\ 3a + b + c = 4 \\ 4a - 5b + 5c = 5 \end{cases}$ **(f)** $\begin{cases} 2x - y + 3z - t - 1 = 0 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - 4y - z - 4t - 3 = 0 \end{cases}$

Exercice 9.5 Résoudre les systèmes suivants. Les lettres m, α, λ désignent des nombres réels fixés. On donnera les ensembles de solutions en distinguant des cas suivant les valeurs de ces paramètres.

(a) $\begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} 5x - 8y + 4z = \lambda x \\ x = \lambda y \\ y = \lambda z \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (3 - m)x - 2y + 3z = 0 \\ x - my + 2z = 0 \\ (2 - m)z = 0 \end{cases}$ **(d)** $\begin{cases} x + \alpha y - \alpha z = 1 \\ y + z = 0 \\ 2\alpha x + (1 + \alpha)y - (1 - \alpha)z = 0 \end{cases}$

Exercice 9.6 Déterminer toutes les fonctions de la forme $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ telles que $f(1) = f(-1) = f'(1) = 1$.

III - Résolution du problème inverse

Exercice 9.7 Pour chacun des systèmes suivants, trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d pour que le système ait au moins une solution.

(a) $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 5y + 3z = b \\ x + 9z = c \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 3y = a \\ 3x + y = b \\ x + 7y = c \\ 2x + 4y = d \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y = a \\ x + y + z = b \\ y + z + t = c \\ z + t = d \end{cases}$

Exercice 9.8 Donner une équation ou un système d'équations de chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^n$ (en commençant bien sûr par préciser l'entier n).

a) $A = \left\{(x, 2x - t + 1, x - 3t - 1, t)\ ;\ (x, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$

b) $B = \left\{(\alpha + \beta, \alpha - \beta, 2\alpha + \beta, 2\alpha - \beta)\ ;\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

c) $C = \left\{(2s + 3, -s - 1)\ ;\ s \in \mathbb{R}\right\}$.

d) $D = \left\{(2s, t - s - 1)\ ;\ (s, t) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

e) $E = \left\{(2 - u, 1 - 2u, 0)\ ;\ u \in \mathbb{R}\right\}$.

f) $F = \left\{(6 + \lambda - \mu, 3 - \lambda + \mu, 1 - 2\lambda + 2\mu)\ ;\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Chapitre 10

Dénombrement

Dans un exercice de dénombrement, notamment en devoir ou au concours, la qualité des explications est un élément déterminant pour évaluer et noter la réponse. Dans les exercices suivants, il ne suffit donc pas de «donner le résultat» ; il est essentiel de justifier celui-ci de façon aussi claire que possible. En pratique, je vous conseille de vous faire la main sur quelques exercices. Une fois que vous pensez maîtriser suffisamment la rédaction pour que celle-ci ne vous fasse pas perdre de temps en DS, vous pouvez passer plus vite sur des exercices semblables, pour gagner en efficacité.

À la belote, au tarot ou au poker, une *main* est un ensemble de cartes que le joueur tient dans sa main. Leur nombre est fixé à l'avance et dépend du jeu choisi. L'ordre n'a pas d'importance puisque le joueur peut trier ses cartes à sa convenance. Il y a quatre *couleurs* dans un jeu de carte : trèfle, pique, cœur, carreau (et non noir ou rouge).

I - Méthodes de base

Exercice 10.1 Pour chacune des situations suivantes, décrire l'ensemble des objets à dénombrer en termes de listes (ordonnées ou non, avec ou sans répétition, de longueur fixée ou non, prises dans quel ensemble), puis indiquer leur nombre.
a) Nombre de mains possibles à la belote (8 cartes dans un jeu de 32).
b) Nombre de mains possibles au poker (5 cartes dans un jeu de 52).
c) Nombre de tirages possibles en lançant successivement 5 dés ordinaires.
d) Nombres de tirages possibles en jouant 11 fois de suite à pile ou face.
e) Nombre de tirages possible en prélevant successivement, sans remise, 3 cartes dans un jeu de 32.
f) Nombre de tirages possible en prélevant successivement, avec remise, 3 cartes dans un jeu de 32.
g) Nombre de répartitions possibles de ces questions entre 9 élèves de la classe au prochain TD.
h) Nombre d'anagrammes du mot *chaise*.
i) Nombre de répartitions possibles de 3 sujets entre les 3 élèves d'un groupe de colle.

Exercice 10.2 Pour chacune des situations suivantes, tracer un arbre pour dénombrer l'ensemble des objets étudiés, rédiger une explication en termes de choix successifs, puis indiquer le nombre total d'objets. S'il est nécessaire de distinguer des cas, on le fera clairement apparaître.
a) Nombre de mains à la belote qui contiennent exactement une dame et un roi.
b) Nombre d'anagrammes du mot *anagramme*.
c) Nombre de *full* possibles au poker (3 cartes d'une valeur, 2 d'une autre valeur).
d) Nombre de *suites* possibles au poker (5 cartes qui se suivent, de couleurs quelconques).
e) Nombre de répartitions possibles de 32 cartes entre 4 joueurs à la belote.
f) Nombres de mains à la belote qui contiennent deux dames ou moins.
g) Nombre de tirages possibles au Yam's (on lance simultanément 5 dés ordinaires).

Exercice 10.3 Pour chacune des situations suivantes, utiliser un passage au complémentaire ou une réunion non disjointe pour dénombrer les objets étudiés.
a) Nombre de mains à la belote qui contiennent au moins un cœur.
b) Nombre de mains à la belote qui contiennent au moins un cœur ou un as.
c) Nombre de mains à la belote qui n'ont aucune coupe franche (les quatre couleurs sont présentes).
d) Nombre de mains à la belote qui contiennent au moins un valet et un neuf de la même couleur.

II - Exercices plus avancés

Exercice 10.4 On fixe un alphabet réduit aux six lettres a, b, c, d, e, f.
Combien peut-on écrire de mots de cinq lettres :

a) en tout ?
b) avec cinq lettres distinctes ?
c) avec deux a et trois b ?
d) avec deux a, deux b, un c ?
e) avec exactement deux a et un b ?
f) avec au moins deux a et un b ?

Exercice 10.5 Un éleveur possède quinze bœufs charolais et douze limousins. Il constitue un troupeau de dix bœufs pour les conduire au pré.
a) Combien y a-t-il de troupeaux possibles ?
b) Combien de ces troupeaux contiennent autant de charolais que de limousins ?
c) Combien de ces troupeaux contiennent au moins deux charolais ?

Exercice 10.6 Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. Ces boules sont discernables (on peut imaginer qu'elles portent un numéro ou une puce qui permet à un observateur de les distinguer). On tire successivement six boules en remettant systématiquement la boule tirée.
a) Quel est le nombre de tirages possible ?
Combien de ces résultats amènent :

b) cinq boules blanches puis une boule noire ?
c) une boule noire au plus ?
d) trois boules blanches et trois boules noires ?
e) une boule blanche au moins ?

Exercice 10.7 On range sur une étagère dix livres, dont deux de Pierre Bordage, trois de Robin Hobb, quatre d'Orson Scott Card et un de Georges R. R. Martin.
a) Quel est le nombre total de dispositions possibles ?
b) Quel est le nombre de dispositions qui plaçent côte à côte les trois livres de Robin Hobb ?
c) Quel est le nombre de dispositions qui regroupent les livres par auteur ?

Exercice 10.8 On installe quatre chevaux dans trois grands boxes d'une écurie. Un box peut recevoir plusieurs chevaux.
a) De combien de façons peut-on opérer de sorte qu'un box au moins reste vide ?
b) De combien de façons peut-on opérer de sorte qu'aucun box ne contienne plus de deux chevaux ?

Exercice 10.9 Un tiroir contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. On choisit deux chaussures au hasard et simultanément.
a) Combien y a t-il de tirages possibles ?
b) Combien amènent deux chaussures de la même couleur ?
c) Combien amènent un pied gauche et un pied droit ?
d) Combien amènent une «vraie» paire, c'est-à-dire un pied gauche et un droit de la même couleur ?

Exercice 10.10 Dans une soirée, n couples se rencontrent et se saluent. Chaque personne serre (une fois) la main de chacune des autres, sauf celle de son conjoint.
Combien y aura-t-il de poignées de main échangées ?

Exercice 10.11 On considère un ensemble E à n éléments et une partie A fixée de E, de cardinal p.
a) Quel est le nombre de parties de E contenant A ?
b) Quel est le nombre de parties de E disjointes de A ?

Exercice 10.12 (de Noël) Les élèves de BCPST 1 se sont cotisés pour offrir une boîte de 50 chocolats à leurs trois professeurs de mathématiques.
Combien y a-t-il de répartitions telles que chacun reçoive au moins un chocolat ? On ne tiendra compte que du nombre de chocolats reçus par chacun.

Exercice 10.13 On appelle *jolimot* un mot qui s'écrit uniquement avec les lettres a et b, sans faire apparaître deux a consécutifs (peu importe que ce mot soit ou non dans le dictionnaire). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note j_n le nombre de jolimots de n lettres.

a) Énumérer tous les jolimots de cinq lettres au plus, et en déduire les nombres j_1, j_2, j_3, j_4, j_5.

b) Soit $n \geqslant 3$ un entier fixé. Montrer que $j_n = j_{n-1} + j_{n-2}$.

Indication : on pourra distinguer les jolimots commençant par la lettre a ou par la lettre b.

c) Combien existe-t-il de jolimots de dix lettres ?

III - Application au calcul de sommes

Exercice 10.14 Un enfant a dessiné n cercles, alignés de gauche à droite sur une feuille de papier. Il en colorie k en rouge et $n-k$ en bleu.

a) Combien y a t-il de coloriages possibles ?

b) Dans combien de coloriages le dernier cercle rouge est-il en i-ème position ?

c) En déduire : $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} = \binom{n}{k}$

Exercice 10.15 (loi hypergéométrique) Soient E et F deux ensembles disjoints ayant respectivement p et q éléments, et r un entier tel que $r \leq p+q$.

a) En dénombrant de deux façons le nombre de parties à r éléments de $E \cup F$, montrer que

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{p}{i}\binom{q}{r-i} = \binom{p+q}{r}.$$

b) En déduire une expression simple de : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

Chapitre 11

Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 11.1 Déterminer les primitives suivantes, en utilisant notamment l'intégration à vue.

a) $\int (x^3 - \frac{2}{x^3})\, \mathrm{d}x$ **d)** $\int e^{2x+7}\, \mathrm{d}x$ **g)** $\int \sqrt{\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}}\, \mathrm{d}x$ **j)** $\int \tan x\, \mathrm{d}x$

b) $\int \cos(5x)\, \mathrm{d}x$ **e)** $\int \sin x \cos^5 x\ x$ **h)** $\int \frac{\ln x}{x}\, \mathrm{d}x$ **k)** $\int (\tan x + \tan^3 x)\, \mathrm{d}x$

c) $\int \frac{1}{x-2}\, \mathrm{d}x$ **f)** $\int \frac{\pi}{(2\pi - x)^8}\, \mathrm{d}x$ **i)** $\int x e^{x^2}\, \mathrm{d}x$ **l)** $\int \frac{1}{4x^2+1}\, \mathrm{d}x$

Exercice 11.2 Déterminer les primitives suivantes, en utilisant notamment l'intégration par parties.

a) $\int x e^{-2x}\, \mathrm{d}x$ **c)** $\int x^2 \cos(\pi x)$ **e)** $\int \ln(1+x^2)\, \mathrm{d}x$ **g)** $\int \cos^5 x\, \mathrm{d}x$

b) $\int x^3 \ln x\, \mathrm{d}x$ **d)** $\int \arctan x\, \mathrm{d}x$ **f)** $\int \sin^4 x\, \mathrm{d}x$ **h)** $\int e^{-x} \cos(3x)\, \mathrm{d}x$

Exercice 11.3 Déterminer les primitives suivantes, en utilisant notamment la division des polynômes avec reste, la linéarisation des expressions trigonométriques et l'exponentielle complexe.

a) $\int \frac{5x^2 - 2x + 4}{x+2}\, \mathrm{d}x$ **b)** $\int \frac{x^2 - x + 3}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$ **c)** $\int \sin^2 x \cos^4 x\, \mathrm{d}x$ **d)** $\int e^{-x} \cos(3x)\, \mathrm{d}x$

Exercice 11.4 Calculer, grâce à un changement de variable bien choisi, les primitives suivantes :

a) $\int x^2(1+x^3)e^{-x^3}\, \mathrm{d}x$ **c)** $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}\, \mathrm{d}x$ **e)** $\int \frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{x}\, \mathrm{d}x$ **g)** $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\, \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^3}}\, \mathrm{d}x$ **d)** $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\, \mathrm{d}x$ **f)** $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x$ **h)** $\int \cos^5 x\, \mathrm{d}x$

Exercice 11.5 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\pi} \sin x \cos x\, \mathrm{d}x$ **d)** $\int_0^{\pi} \cos x e^x\, \mathrm{d}x$ **g)** $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, \mathrm{d}x$, **j)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x\, \mathrm{d}x$.

b) $\int_1^e x^3(\ln x)^2\, \mathrm{d}x$ **e)** $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\, \mathrm{d}x$ **h)** $\int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+1}\, \mathrm{d}x$, **k)** $\int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)\, \mathrm{d}x$.

c) $\int_0^{\pi/4} \tan x\, \mathrm{d}x$ **f)** $\int_0^{\pi} t \sin t \cos^2 t\, dt$ **i)** $\int_0^1 (x - 3) \cos x\, e^{2x}\, \mathrm{d}x$ **l)** $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, \mathrm{d}x$.

Exercice 11.6 Calculer l'intégrale $I = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \ln x\, \mathrm{d}x$.

Indication : on pourra poser $u = 1/x$.

Exercice 11.7 Soient p et q deux entiers naturels. On pose $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\, \mathrm{d}x$.

a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que $I(q,p) = I(p,q)$.
b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I(p+1,q)$ à l'aide de $I(p,q+1)$.
c) Calculer $I(0,q)$. En déduire une formule explicite pour $I(p,q)$.

Exercice 11.8 Soit $f : x \mapsto \int_{\tan^2 x}^{\cot^2 x} \arctan(\sqrt{t})dt$, où $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de la fonction f, et étudier sa dérivabilité sur cet ensemble.
b) Calculer la dérivée de f là où elle existe, et en déduire une expression simple de la fonction f.

Chapitre 12

Équations différentielles et suites récurrentes

I - Équations différentielles

Exercice 12.1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a) $y' = 4y - 12$ **b)** $3z' + 5z + 1 = 0$ **c)** $u + \tau\dfrac{du}{dt} = E$ $(\tau, E \in \mathbb{R}_+^*)$

Exercice 12.2 Pour chaque question, déterminer l'unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle et les conditions initiales.

a) $2y' - y = 0\,;\quad y(-1) = 3$ **b)** $y' + y = -e\,;\quad y(0) = e$

Exercice 12.3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

a) $y'' - y = 0$

b) $y'' + y = 0$

c) $y'' + 4y' + 3y = -6$

d) $y'' + y' + y = 2.$

e) $\dfrac{d^2H}{dt^2} + 2f\dfrac{dH}{dt} + (\omega^2 + f^2)H = 0$

Exercice 12.4 Donner la forme générale des solutions des équations différentielles suivantes sur **R**, puis calculer la solution vérifiant les conditions initiales données :

a) $y'' + y = 0,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0.$

b) $y'' - 3y' + 2y = 0,\quad y'(0) = y(0) = 1.$

c) $y'' + 2y' + 2y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1.$

d) $y'' - 2y' + y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = -2.$

Exercice 12.5 Résoudre les équations différentielles :

a) $2y' - y = e^{3x}$ (on cherchera une solution en λe^{3x})

b) $y'' - 3y' + 2y = x^3$ (on cherchera une solution polynômiale de degré 3)

c) $y'' - 2y' + y = e^x + xe^{-x}$ (on cherchera à superposer des solutions en $\lambda x^2 e^x$ et $(\lambda x + \mu)e^{-x}$)

d) $y' + 5y = \cos x \sin x$ (on cherchera une solution de la forme $\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$).

e) $y'' - y = e^{-x}\cos x$ (on cherchera une solution de la forme $e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$.

Exercice 12.6 On considére l'équation différentielle : $y'' - 4y = 4e^{-2x}$ (E).
Déterminer la solution f dont la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe (Ox) et telle que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'intersection avec l'axe (Oy) soit parallèle à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 12.7 On considère l'équation différentielle (E) : $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$, où $y^{(4)}$ désigne la dérivée d'ordre 4 de y. Étant donnée une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note $z = y'' + 4y$.

a) Démontrer que, si y est solution de (E), alors z est solution d'une équation différentielle (F).

b) Résoudre l'équation (F).

c) En déduire que, si y est solution de (E), alors il existe deux réels α et β tels que y est solution de l'équation différentielle $(G_{\alpha,\beta})$: $y'' + 4y = \alpha e^x + \beta e^{-x}$.

d) Résoudre l'équation $(G_{\alpha,\beta})$, en superposant des solutions particulières en λe^x et μe^{-x}.

e) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 12.8

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$.
Indication : on pourra montrer que f est deux fois dérivable et chercher une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par f.

b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x) + e^x$.

Exercice 12.9 On cherche les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation : $x^2y''+3xy'+y=\dfrac{1}{x^2}$ (E).
Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $g(t)=f(e^t)$.
a) Démontrer que la fonction g est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) Pour $x\in]0,+\infty[$, exprimer $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ à l'aide de la fonction g et de $\ln x$.
c) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution d'une équation différentielle (E').
d) Résoudre l'équation (E'), et en déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
e) Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) telle que $f(1)=f'(1)=0$.

II - Suites récurrentes

Exercice 12.10 Donner la formule explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de la manière suivante :
a) $u_0=1$ et $\forall n\geqslant 0,\ u_{n+1}=-3u_n+8$
b) $u_0=1$ et $\forall n\geqslant 0,\ u_{n+1}=-u_n+5$
c) $u_2=3$ et $\forall n\geqslant 2,\ u_{n+1}=u_n-1$
d) $u_1=1$ et $\forall n\geqslant 1,\ u_{n+1}=6u_n-10$
e) $u_0=\dfrac{1}{5}$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-\dfrac{1}{4}u_n+\dfrac{1}{3}$

Exercice 12.11 Donner la formule explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de la manière suivante :
a) $u_0=0$, $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}+3u_n$
b) $u_2=u_3=1$ et $\forall n\geqslant 2,\ u_{n+2}=4(u_{n+1}-u_n)$
c) $u_1=1$, $u_2=2$ et $\forall n\geqslant 3,\ u_n=2u_{n-1}-2u_{n-2}$
d) $u_0=u_1=1$ et $\forall n\geqslant 0,\ 4u_{n+2}=u_n$

Exercice 12.12 On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=-3u_{n+1}-9u_n$.
a) Expliciter l'ensemble $\mathscr{E}$ de trois façons différentes.
b) Déterminer l'unique suite $u\in\mathscr{E}$ vérifiant de plus $u_0=1$ et $u_2=0$.

Exercice 12.13 Soit (v_n) la suite définie par : $v_0=1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\dfrac{v_n}{1+v_n}$.
a) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n=1/v_n$ est arithmétique.
b) En déduire une expression de v_n en fonction de n.

Exercice 12.14 Soit $a>0$ fixé, et (u_n) une suite telle que $u_1>0$ et, pour tout $n\geqslant 1$, $u_{n+1}=au_n^2$.
a) Pour tout $\geqslant 1$, on pose $v_n=\ln(u_n)$.
Montrer que la suite (v_n) est bien définie et qu'elle est arithmético-géométrique.
b) En déduire, pour $n\geqslant 1$, l'expression de u_n en fonction de u_1, a et n.

Exercice 12.15
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$, avec $f(x)=\dfrac{4+x}{1+x}$.
a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet exactement deux solutions ℓ_1 et ℓ_2 telles que $\ell_1<\ell_2$.
b) Montrer que la suite (u_n) est bien définie et strictement positive.
c) On pose $v_n=\dfrac{u_n-\ell_2}{u_n-\ell_1}$. Montrer que (v_n) est géométrique.
d) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 12.16
Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence $(\mathscr{R})$ $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=-u_n+n+1$.
a) Déterminer une suite arithmétique (a_n) vérifiant la relation $(\mathscr{R})$.
b) Montrer qu'une suite (u_n) vérifie $(\mathscr{R})$ si, et seulement si, la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-a_n$ est géométrique de raison -1.
c) En déduire toutes les suites de $\mathscr{E}$.

Exercice 12.17 Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$, $u_1=2$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}(u_n)^2$.
a) Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $v_n=\ln u_n$. Montrer que la suite (v_n) est bien définie.
b) Quelle relation de récurrence la suite (v_n) vérifie-t-elle ?
c) En déduire une expression de v_n puis une expression de u_n en fonction de n.

Chapitre 13

Géométrie

Sauf mention explicite du contraire, le plan est toujours rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, et l'espace à un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

I - Équations

Exercice 13.1 Pour chacune des droites suivantes du plan, donner une équation cartésienne, un paramétrage, un point, un vecteur directeur, un vecteur normal, puis tracer cette droite.

a) $D_1 : 3x - 2y = 7$

b) $D_2 = \{(1-5t, 2-4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

c) D_3 passant par $A(1,\sqrt{3})$ dirigée par $\vec{u}(\sqrt{3},1)$

d) D_4 passant par $B(-1,2)$ normale à $3\vec{i} - \vec{j}$

Exercice 13.2 Pour chacune des droites suivantes de l'espace, donner un système d'équations cartésiennes, un paramétrage, un point, un vecteur directeur et deux vecteur normaux non colinéaires.

a) $D_1 : \begin{cases} 3x - 2y + z = 7 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

b) $D_2 = \{(3+2t, 4+3t, 5+4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

c) D_3 passant par $A(1,-1,1)$ et $B(1,2,3)$

Exercice 13.3 Pour chacun des plans suivants de l'espace, donner une équation cartésienne, un paramétrage, un point, un vecteur normal, et deux vecteurs formant une base.

a) $P_1 : x - 2y + 3z = 0$

b) $P_2 = \{(s+t, s-t+2, 3s-5t) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$

c) P_3 passant par $X(2,-1,3)$ normal à $\vec{r}(1,0,2)$

d) $P_4 = \mathrm{Vect}\{-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, 2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}\}$

e) P_5 contenant les points $A(1,1,0)$, $B(1,0,1)$, et $C(0,1,1)$

Exercice 13.4 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Montrer les identités remarquables :

a) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

c) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

d) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$

Exercice 13.5 Soients A, B, C, D quatre points du plan.

a) Démontrer que $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

b) En déduire que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Exercice 13.6 On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 3+\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par le point $B(1,1)$.

On considère la famille de droites (Δ_m) avec $\Delta_m : mx + (3m-1)y + 2 = 0$.

c) Déterminer la valeur m_1 pour laquelle Δ_{m_1} est parallèlle à $\mathscr{D}$.

d) Déterminer la valeur m_2 pour laquelle Δ_{m_2} est parallèlle à $\mathscr{D}$.

e) Déterminer le point d'intersection des droites Δ_{m_1} et Δ_{m_2}.

Exercice 13.7 Dans l'espace, soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3x + y - 2z + 3 = 0$.

a) Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par le point $A(1,2,3)$.

b) Déterminer un paramétrage de la droite $\mathscr{D}$ perpendiculaire à $\mathscr{P}$ et passant par le point A.

c) Déterminer le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$.

Exercice 13.8 Soient a et b deux réels fixés. Dans l'espace, on considère les droites $\mathscr{D}_1$, passant par $A(a, 2, 3)$ et dirigée par $\vec{u}_1(1, 1, 1)$, et $\mathscr{D}_2$, passant par $B(b, 1, 4)$ et dirigée par $\vec{u}_2(2, -1, 3)$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ soient concourantes.

Exercice 13.9 Dans l'espace, soient $\mathscr{P}$, le plan passant par $A(1, -1, 0)$ et dirigé par $\vec{u}(2, 1, -1)$ et $\vec{v}(1, 4, 1)$, et $\mathscr{P}'$, le plan d'équation cartésienne $x - 1 = 0$.
a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$.
b) Justifier que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ se coupent suivant une droite $\mathscr{D}$ et déterminer un point et un vecteur directeur de cette droite.

Exercice 13.10 Dans l'espace, on considère les droites :
$\mathscr{D}$, passant par $A(3, 0, 1)$ et dirigée par $\vec{u}\,(2, 1, 1)$, et $\mathscr{D}'$, d'équations cartésiennes $\begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases}$.
a) Démontrer que ces droites sont concourantes, et déterminer leur point d'intersection.
b) Démontrer que ces droites sont coplanaires et déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ qui les contient.

Exercice 13.11 On se place dans le plan.
a) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $\Omega(1, -1)$ et passant par $A(3, 1)$.
b) Déterminer les caractéristiques du cercle $\mathscr{C}_2$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$.
c) Soient $B(5, 1)$ et $C(1, 4)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}_3$ de diamètre $[BC]$.
d) Déterminer les coordonnées des points d'intersections des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$.

II - Barycentres

Exercice 13.12 Sur une feuille, tracer un triangle équilatéral ABC de côté 5 cm.
a) Soit D le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 3)$. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis placer D.
b) Soit E le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 3)$, $(C, 5)$. Montrer que E est le milieu de $[DC]$, puis placer E.
c) Placer le barycentre F de $(A, 2)$, $(B, -3)$, puis le barycentre G de $(A, 2)$, $(B, -3)$, $(C, 2)$.
d) Placer le milieu H du segment $[AC]$, puis démontrer que les points C, G, H sont alignés.

Astuce. Si M, X et Y sont trois points du plan ou de l'espace, on peut utiliser la relation de Chasles pour écrire :
$$\overrightarrow{MY} = \overrightarrow{MX} + \overrightarrow{XY} \quad \text{et} \quad MY^2 = \overrightarrow{MY} \cdot \overrightarrow{MY} = (\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{XY}) \cdot (\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{XY}).$$

Exercice 13.13 Soient A et B deux points distincts du plan. Faire un dessin avec $AB = 8cm$.
On veut résoudre l'équation $3MA^2 + 5MB^2 = 2AB^2$ $(\star)$, où l'inconnue M est un point du plan.
a) Vérifier que le milieu C du segment $[AB]$ est solution de l'équation $(\star)$.
b) On note G le barycentre de $(A, 3), (B, 5)$. Exprimer, en fonction de AB, les distance GA et GB.
c) En utilisant l'astuce ci-dessus, montrer que, pour tout point M du plan,
$$3MA^2 + 5MB^2 = 8MG^2 + 3GA^2 + 5GB^2.$$
d) En déduire que l'ensemble des solutions de $(\star)$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
e) De même, déterminer l'ensemble des solutions des équations :
$$3MA^2 + 5MB^2 = AB^2 \ (\star\star) \qquad \text{et} \qquad 2MA^2 + MB^2 = 2AB^2 \ (\star\star\star).$$

Exercice 13.14 Soient A, B, C trois points non alignés. On note G leur isobarycentre. En s'inspirant de l'exercice précédent, résoudre d'équation d'inconnue M :
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + AC^2.$$

III - Introduction à l'algèbre linéaire

On note $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan, et $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

Exercice 13.15 Pour chacune des applications $f : \overrightarrow{\mathscr{E}} \to \overrightarrow{\mathscr{E}}$ définies ci-dessous, indiquer si elle est linéaire ou non.

a) $f(\vec{u}) = 3\vec{u}$

b) $f(\vec{u}) = \vec{u} + 2\vec{i}$

c) $f(\vec{u}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

d) $f(\vec{u}) = \vec{0}$

e) $f(\vec{u}) = (\vec{i} \cdot \vec{u})\,\vec{k}$

f) $f(\vec{u}) = \|\vec{u}\|\,\vec{i}$

Exercice 13.16 Pour $\vec{u}$ un vecteur du plan, on note $f(\vec{u}) = 2\vec{u} - (\vec{a} \cdot \vec{u})\,\vec{a}$, où $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$.

a) Calculer $f(\vec{i})$, $f(\vec{j})$, $f(\vec{i}+\vec{j})$, $f(\vec{i}-\vec{j})$.

b) Démontrer que $f : \overrightarrow{\mathscr{P}} \to \overrightarrow{\mathscr{P}}$ est une application linéaire.

c) Résoudre l'équation $f(\vec{u}) = \vec{0}$.

Exercice 13.17 Dans le plan, on pose $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.

a) À l'aide du déterminant, montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
La famille $\mathscr{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est donc une base du plan.

b) Soient x et y des réels fixés. Résoudre le système $\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = x \\ -2\alpha - 3\beta = y \end{cases}$, d'inconnues α et β.

c) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 13.18 Dans l'espace, on pose $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{j} + \vec{k}$, et $\vec{w} = 2\vec{k} + \vec{i}$.

a) Déterminer une équation du plan $Q = \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

b) Montrer que $\vec{w} \notin Q$. La famille $\mathscr{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est donc une base de l'espace.

c) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Chapitre 14

Polynômes

I - Opérations sur les polynômes, racines, factorisation

Exercice 14.1 Calculer les polynômes suivants.

a) $P(x) = (x^2+x+1)(3x^5-2x^3+4x^2-7)$

b) $P(x) = (2x^3-3x^2-4)(\frac{x^4}{3}-\frac{x^3}{2}-x^2+5)$

c) $P(x) = (x^2+x+1)^4$

d) $P(x) = \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}\right)$

Exercice 14.2 Calculer les quotients et les restes des divisions polynomiales suivantes.

a) $2x^5-4x^3+5x^2-7$ par $x-2$

b) $2x^5-4x^3+5x^2-7$ par $x+1$

c) $3x^6-7x^3+4$ par x^2-1

d) $x^5+2x^4-16x-32$ par x^2+4x+4

Exercice 14.3 À quelle condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ le polynôme $A(X) = X^4+aX^2+bX+c$ est-il divisible par le polynôme $B(X) = X^2+X+1$?

Exercice 14.4 Calculer les polynômes dérivés ou primitifs suivants.

a) P'', avec $P(X) = X^7+X^6+X^5+X^2+X+1$

b) $Q^{(3)}$, avec $Q(X) = \frac{X^{20}}{10}+\frac{X^{17}}{9}+\frac{X^{14}}{8}+\frac{X^{11}}{7}$

c) $R^{(5)}$, avec $R(X) = \frac{3}{4}X^6-\frac{2}{3}X^5+\frac{1}{2}X^4$

d) S, avec $S''(X) = 4X^4-5X^2+6$ et $S(\pm 1) = 0$

Exercice 14.5 Montrer qu'il existe un unique polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3, tel que :

$$P(0) = 2, \quad P'(0) = 3, \quad P''(0) = 4, \quad P'''(0) = 5.$$

Exercice 14.6 On considère un polynôme P de degré $d \in \mathbb{N}$ et de coefficient dominant $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes $Q = X^2P'+P$ et $R = XP'-2P$.

Exercice 14.7 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
Indication : on pourra dans un premier temps s'intéresser au degré d'une éventuelle solution.

Exercice 14.8 Soit $P(X) = X^6-3X^5+5X^4-6X^3+3X^2+X-1$.
Quelle est la multiplicité exacte de la racine 1 ?

Exercice 14.9 On considère le polynôme $P(X) = X^5+6X^4+10X^3-20X^2-51X-26$.

a) Vérifier que -1 et 2 sont racines du polynôme P et déterminer leurs ordres de multiplicité.

b) Trouver, si nécessaire, les autres racines de P, et en déduire sa factorisation sur $\mathbb{C}$.

Exercice 14.10 On pose $Q(X) = X^4-2X^3+9X^2-2X+8$.

a) Vérifier que i est racine du polynôme Q. Deviner une autre racine de Q.

b) Trouver les racines restantes, et en déduire la factorisation de Q sur $\mathbb{C}$.

Exercice 14.11 Dans $\mathbf{C}[X]$, on considère les polynômes

$$P(X) = 4X^4-12X^3+17X^2-10X+2 \text{ et } Q(X) = 4X^8-12X^6+17X^4-10X^2+2.$$

a) Vérifier que $1/2$ est racine de multiplicité 2 de P.

b) Obtenir la factorisation de P sur $\mathbb{C}$.

c) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 = 1+i$, et en déduire la factorisation du polynôme X^2-1-i.

d) Donner la factorisation de Q sur $\mathbb{C}$.

Exercice 14.12 Soit $n \geq 1$. On considère le polynôme P défini par $P(X) = aX^{n+1}+bX^n+1$. Déterminer les réels a et b pour que P soit divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 14.13 Soit $(a, b) \in \mathbf{C}^2$, et P le polynôme défini par : $P(X) = X^4 + 6X^2 + aX + b$.
a) Déterminer les couples (a, b) tels que P ait une racine de multiplicité au moins 3.
b) Pour chaque couple, déterminer l'autre racine complexe de P.
Indication : on pourra calculer $P(0)$ de deux façons différentes.

Exercice 14.14 Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes définis par :
a) $P(X) = X^4 - 1$ **c)** $R(X) = X^4 - 4X^2 - 21$ **e)** $T(X) = X^4 + 5X^3 - X - 5$
b) $Q(X) = X^3 + 8$ **d)** $S(X) = X^6 + 2X^4 + 2X^2 + 1$ **f)** $U(X) = X^4 + 7X^3 + 12X^2 + 7X + 1$

Exercice 14.15
a) Soit $n \geq 1$. Démontrer que $P(X) = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ est divisible par $X^2 - 3X + 2$.
b) Soit $n \geq 2$. Soit $P(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.
Quelle est la multiplicité de la racine 1 ?

II - Exercices plus avancés

Exercice 14.16 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $P(-X) = P(X)$.
Démontrer que tous les monômes non nuls de P sont de degré pair.

Exercice 14.17 Soit P un polynôme à coefficients réels, et z une racine complexe de P, de multiplicité m. En calculant $P(\bar{z})$, démontrer que $\bar{z}$ est racine de P de même multiplicité.

Exercice 14.18 Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.
On suppose : $\forall i \in [\![0, n]\!], P(i) = Q(i)$. Démontrer que $P = Q$.

Exercice 14.19 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.
On suppose que : $\forall t \in [0, \pi],\ P(\sin t) = 0$. Démontrer que $P = 0$.

Exercice 14.20 Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale et périodique de période $T > 0$.
a) On pose $Q(x) = P(x) - P(0)$. Montrer que Q est un polynôme et possède une infinité de racines.
b) Que peut-on en conclure concernant le polynôme Q ? concernant le polynôme P ?
c) La fonction cos est-elle polynomiale ?

Exercice 14.21
On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = (1 + X^2)P_n' - 2X(n+1)P_n \end{cases}$
a) Déterminer P_1, P_2, P_3.
b) Déterminer en fonction de n le degré et le coefficient dominant de P_n.

Exercice 14.22 (Polynômes de Lagrange)
a) Déterminer : - le polynôme L_0 de degré 2 tel que $L_0(0) = 1$ et $L_0(1) = L_0(2) = 2$,
- le polynôme L_1 de degré 2 tel que $L_1(1) = 1$ et $L_1(0) = L_1(2) = 2$,
- le polynôme L_2 de degré 2 tel que $L_2(2) = 1$ et $L_2(1) = L_2(2) = 2$.

b) Calculer $L_0 + L_1 + L_2$.
c) À l'aide de L_0, L_1, L_2, trouver un polynôme P de degré $\leqslant 2$ tel que $P(0) = P(1) = 3$ et $P(2) = 1$.
d) Montrer que le polynôme P vérifiant ces propriétés est unique.

Exercice 14.23 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{1/x}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d_n(x) = x^{2n}e^{-1/x}f^{(n)}(x)$, de sorte que $f^{(n)}(x) = \dfrac{d_n(x)}{x^{2n}}e^{1/x}$.
a) Calculer les fonctions d_0, d_1, d_2, d_3.
b) Démontrer par récurrence que d_n est une fonction polynomiale.
c) Pouvez-vous préciser le degré et le coefficient de d_n, en fonction de n ?

Chapitre 15
Calcul matriciel

Exercice 15.1
On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$, et $E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.
Calculer, lorsque cela a un sens :

$$3A+5B, \quad BA, \quad AB, \quad AC-2B, \quad (B-2I_2)^2, \quad C^3, \quad AE, \quad CE, \quad DE \quad \text{et} \quad ED.$$

Exercice 15.2 On considère, dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^2, J^3, A^2, A^3.
b) Exprimer la matrice J^n en fonction de l'entier naturel n (on attend une preuve par récurrence).
c) Exprimer alors A^n en fonction de n.

Exercice 15.3 Soit A, B deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a) Si $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
b) Si $A^2 = A$, alors $A = I_2$ ou $A = 0$.
c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
d) Si $AB = 0$ et A est inversible alors $B = 0$.
e) Si $AB = 0$ et B est inversible alors $A = 0$.
f) $AB + A = A(B+1)$.

Exercice 15.4 Soit A et B deux matrices telles que les produits AB et BA existent.
a) Démontrer les AB et BA sont des matrices carrées.
b) On suppose $(AB)^2 = 0$. Prouver que $(BA)^3 = 0$. *Indication :* développer les produits $(AB)^2$ et $(BA)^3$.
c) Sauriez-vous trouver des matrices A et B telles que $(AB)^2 = 0$ mais $(BA)^2 \neq 0$?

Exercice 15.5 Soit A une matrice de taille $n \times p$. On note $M = AA^T$ et $N = A^TA$.
a) Vérifier que les matrices M et N sont bien définies, et préciser leurs tailles.
b) Montrer que M et N sont des matrices symétriques.

Exercice 15.6 Soit A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
a) Factoriser les expressions $A + 2AB$ et $A - 3BA$.
b) Soit P une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $PAP^{-1} = B$.
Exprimer A en fonction de P et B. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P et B^n

Exercice 15.7 Pour chacune des matrices suivantes, donner un paramétrage de son noyau et un système d'équations de son image. Si la matrice est inversible, calculer son inverse.
Faire ensuite de même avec les transposée de ces matrices.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 15.8 On considère les matrices définies par $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
a) Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
b) Résoudre l'équation matricielle $AX = B$ (d'inconnue X).

Exercice 15.9 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2, A^3 puis $A^3 - 5A^2 + 9A$.
b) Factoriser $A^3 - 5A^2 + 9A$, déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.
c) Retrouver l'expression de A^{-1} par une méthode directe.

Exercice 15.10 Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On propose deux méthodes pour calculer A^n en fonction de N.

a) (méthode 1) Calculer A^n en écrivant A sous la forme $A = I_3 + N$ et en utilisant la formule du binôme (est-ce possible ici ?).
b) (méthode 2) Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\,(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
En prouvant l'hérédité, on obtiendra des expressions de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
Exprimer alors a_n et b_n en fonction de n, et en déduire une expression de A^n.
c) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
Astuce : conjecturer une expression de la matrice A^{-1} à l'aide des questions précédentes, puis vérifier.

Exercice 15.11 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) La matrice M est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.
b) Montrer qu'il existe exactement deux réels $\alpha < \beta$ tels que les matrices $M_\alpha = M - \alpha I_3$ et $M_\beta = M - \beta I_3$ ne soient pas inversibles.
c) Déterminer les noyaux et images des matrices M_α et M_β (paramétrages, équations).
d) Démontrer que $\ker M_\alpha = \operatorname{im} M_\beta$ et $\ker M_\beta = \operatorname{im} M_\alpha$.

Exercice 15.12 Soit A la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des réels λ pour lesquels la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible. La matrice A est-elle inversible ?
b) Pour λ dans $\mathscr{S}$, calculer $(A - \lambda I_2)^2$.
c) En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A, I_2.
d) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.
e) Exprimer pour tout entier naturel n, α_n et β_n en fonction de n.
On pourra montrer que la suite (α_n) ou la suite (β_n) vérifie une relation linéaire d'ordre 2.

Exercice 15.13 On considère deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = 10a_n - 6b_n \\ b_{n+1} = 18a_n - 11b_n \end{cases}$ $(\star)$.

On pose alors, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a) Écrire le système $(\star)$ sous forme matricielle, à l'aide de U_n, U_{n+1} et d'une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.
b) Exprimer alors U_n en fonction de U_0, A et n.
c) On pose ensuite $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Vérifier que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
d) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D puis calculer D^n pour tout entier naturel n.
e) Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D, puis montrer que pour tout entier n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
f) En déduire, pour tout entier n, les expressions explicites de a_n et b_n en fonction de a_0, b_0 et n.